4. cvičení

1. Mějme balíček karet očíslovaných $1, 2, \ldots, n$, ze kterého postupně snímáme všechny karty.

   (a) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání přijde karta číslo 1 dříve než karta číslo 2.

   [Výsledek: $\frac{n!}{2}$.]

   (b) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání je mezi kartou číslo 1 a kartou číslo 2 právě k dalších karet.

   [Výsledek: $2 \cdot (n-k-1) \cdot (n-2)!$.]

2. Kolik nezáporných celých čísel menších než 10^6 obsahuje každou z cifer $1, 2, 3, 4$?

   [Výsledek: $10^6 - 4 \cdot 9^6 + 6 \cdot 8^6 - 4 \cdot 7^6 + 6^6$.]

3. Uvažujme všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) Kolik z nich obsahuje číslo 1?

   [Výsledek: $\binom{n-1}{2}$.]

   (b) Kolik je dvojic tříprvkových podmnožin, které mají společný právě jeden prvek?

   [Výsledek: $\frac{1}{2}n\binom{n-1}{2}\binom{n-3}{2}$.]

4. Mějme množinu $M = \{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) Kolika způsoby lze množinu M rozložit na dvě neprázdné části?

   [Výsledek: $2^{n-1} - 1$.]

   (b) Kolika způsoby je možné prvky množiny M seřadit do kruhu tak, aby 1 a n nebyly vedle sebe?

   [Výsledek: $(n-3)(n-2)!$ pro $n \geq 3$.]

5. Kolika způsoby může být $k \geq 1$ knih umístěno na $n \geq 1$ rozlišitelných polic, jestliže

   (a) knihy jsou nerozlišitelné kopie stejného titulu?

   [Výsledek: $\binom{n+k-1}{k}$.]

   (b) žádné dvě knihy nejsou stejné a záleží na pozici knih v polici?

   [Výsledek: $\binom{n+k-1}{k}k!$.]

6. Uvažme binární posloupnosti délky 8 obsahující šest nul a dvě jedničky. V kolika z nich nejsou dvě jedničky bezprostředně za sebou?

   [Výsledek: $\binom{8}{2} - \binom{7}{1}$.]

7. Kolik podmnožin o alespoň dvou prvcích obsahuje množina $\{1, \ldots, n\}$?

   [Výsledek: $2^n - 1 - n$.]