Úlohy na rozmyšlenou, série 6

Deadline: 14.6.2020

S14 Nechť $X_1, X_2, X_3, \dots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s uniformním rozdělením na intervalu $[0,1]$. Definujme veličiny $Y_1 = X_1$

$$Y_i = \begin{cases} X_i & i \text{ sudé}\,, \\ 1 - X_{i-1} & i \text{ liché},\ i > 2 \end{cases}$$

a dále $Z_i = X_1$, $i \in \mathbb{N}$. Označme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i,\ V_n = \sum_{i=1}^n Y_i,\ W_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $n \in \mathbb{N}$. K jakému rozdělení konvergují veličiny

$$U_n = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}\, S_n}},\ A_n = \frac{V_n - \mathbb{E}V_n}{\sqrt{\mathrm{D}\, V_n}},\ B_n = \frac{W_n - \mathbb{E}W_n}{\sqrt{\mathrm{D}\, W_n}}\ ?$$

Jaký předpoklad pro použití CLV je zde zásadní?

S16 Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, stejně rozdělené veličiny s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1\,, \\ \frac{3}{x^4} & x > 1\,. \end{cases}$$

Pro $n = 10^2$, $n = 10^3$ a $n = 10^4$ udělejte odhady, jak dobře se dají veličiny

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{3}{2}n}{\sqrt{\frac{3}{4}n}}$$

aproximovat rozdělením $\mathrm{N}(0,1)$.
Hint: Porovnávejte distribuční funkce. (Pomocí výpočetní techniky)
Hint 2: Distribuční funkci S_n lze pomocí konvolučního vzorce zkusit upočítat numericky.
Hint 3: Hustotu S_n lze generovat pomocí mnoha různých evaluací S_n, kde realizace X_i lze generovat jako hodnoty rovnoměrného rozdělení na $[0,1]$ zobrazené kvantilovou funkcí F_X^{-1}.

S17 Buď $X_1, X_2, \dots, X_n$ náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[-\alpha, \alpha]$, kde $\alpha > 0$ je jistý parametr. Označme $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeho realizaci. Odvoďte maximálně věrohodný odhad pro α.