3. cvičení z PST

Matěj Novotný

2.3.2020

G1 Geometrické rozdělení. Alice a Bob házejí míčem na koš. Kdykoli střílí Alice, má pravděpodobnost a, že zasáhne, obdobně Bob b. Střídají se, Alice začíná. Kdo koš trefí jako první, vyhrává.

a) Jakou má kdo pravděpodobnost výhry? Jaká je pravděpodobnost, že hra nikdy neskončí?

b) Nalezněte pravděpodobnosti a a b tak, aby oba měli stejnou šanci na výhru.

G2 Jevy A, B jsou nezávislé. Platí $P(A \cup B) = 0.9$, $P(A) = 0.3$. Určete $P(B)$, $P(A|B)$ a $P(\overline{A}|\overline{B})$.

G3 Jevy A, B, C jsou po dvou nezávislé. Platí $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ a $P(A \cup B \cup C) = 1$. Určete

a) $P(A \cup B)$

b) $P(A \cap B \cap C)$

c) Mohou být jevy A, B, C nezávislé? Zdůvodněte.

G4 V populaci 20% mladých voličů volí stranu Q, u středně starých je to pouze 5% a u starých je to 10%. V populaci je stejně mladých jako starých voličů a středně starých je stejně jako mladých a starých voličů dohromady.

a) Kolik procent hlasů získá strana Q?

b) Náhodně vyberu jednoho voliče strany Q. Jaká je šance, že je mladý?

G5 V populaci je 1% nemocných chorobou CH. Test nemoci je u 3% zdravých falešně pozitivní a u 6% nemocných falešně negativní.

a) Kolik procent populace má pozitivní test?

b) Jaká je pravděpodobnost, že pacient s pozitivním testem je nemocný?

c) Léčba je zatěžující. Proto každý, komu vyjde positivní test, je podroben testu znovu. Jaká je pravděpodobnost, že člověk s dvěma positivními testy je zdravý?

Výsledky

G1 a) Pokud platí $a > 0$ nebo $b > 0$, potom šance Alice je $\frac{a}{a+b-ab}$, šance Boba $\frac{b(1-a)}{a+b-ab}$. Pravděpodobnost, že hra nikdy neskončí, je $\lim_{n\to\infty}\left((1-a)(1-b)\right)^n$, což je rovno 1, pokud $a = b = 0$ a 0 jinak.

G2 $P(B) = \frac{6}{7}$, $P(A|B) = 0.3$ a $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.7$.

G3 a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{4}$, c) z $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ a b) plyne, že pokud jsou jevy A, B, C nezávislé, musí být $P(C) = 1$. Avšak s tím není v zadání spor, tedy A, B, C mohou být nezávislé.

G4 a) Máme $P(Q) = P(Q|M) \cdot P(M) + P(Q|SS) \cdot P(SS) + P(Q|S) \cdot P(S) = 0.1$. b) Jest

$$P(M|Q) = \frac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \frac{P(Q|M) \cdot P(M)}{P(Q)} = \frac{1}{2}.$$

G5 a) Věta o úplné pravděpodobnosti dává 0.0391. b) Bayesův vzorec (analogicky jako v **G4** b)) dává 0.2404. c) Důležité si uvědomit: u náhodně vybraného člověka z populace jsou výsledky dvou po sobě jdoucích testů (kromě vyjmečných případů) závislé! Pokud však vybereme nemocného člověka a testování probíhá nezávisle, jsou pak nezávislé i výsledky testů. Stejně tak pro zdravého člověka. Máme tedy $P(++|Z) = (P(+|Z))^2$ a obdobně pro $P(++|N)$. Celkem tedy $P(++) = P(++|Z) \cdot P(Z) + P(++|N) \cdot P(N)$. Poté opět použitím Bayesova vzorce

$$P(Z|++) = \frac{P(++|Z) \cdot P(Z)}{P(++)} = 0.0916.$$

Pozn. Je zřejmě $P(N|++) = 1 - P(Z|++) = 0.9084$. Všimněte si zásadního zlepšení spolehlivosti testu!