3. cvičení

1. Kolik existuje různých celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$, která splňují $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 2$ a $x_4 \geq 3$? Kolik z nich je takových, že $x_1 \leq 3$?
   [Výsledek: $\binom{13}{3}$; $\binom{13}{3} - \binom{9}{3}$.]

2. Kolik existuje různých nezáporných celočíselných řešení nerovnice $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$? Kolik z nich je takových, že všechna tři čísla x_1, x_2, x_3 jsou sudá?
   [Výsledek: $\binom{14}{3}$; $\binom{8}{3}$.]

3. Ve výtahu je 6 osob. Kolika způsoby mohou vystoupit na 4 zastávkách, jestliže na každé zastávce vystoupí alespoň jedna osoba?
   [Výsledek: $4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4$.]

4. Mějme n krabic očíslovaných $1, 2, \ldots, n$. Do těchto krabic rozmístíme k stejných míčků tak, aby počet míčků v každé krabici nepřesáhl její číslo.

   (a) Jaký je maximální počet k_0 míčků, abychom mohli takové rozdělení vytvořit.
   [Výsledek: $k_0 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.]

   (b) Mějme nyní $n \geq 2$ a $k = k_0 - 2$. Kolik takových rozdělení existuje.
   [Výsledek: $n - 1 + \binom{n}{2}$.]

5. Máme n modrých a n bílých míčků.

   (a) Kolika způsoby je lze rozdělit do dvou nerozlišitelných misek tak, aby na každé bylo právě n míčků?
   [Výsledek: Pro n sudé máme $\frac{1}{2}n + 1$ možností. Pro n liché máme $\frac{1}{2}(n+1)$ možností.]

   (b) Bílé míčky jsou očíslovány čísly $1, \ldots, n$ a modré míčky rovněž čísly $1, \ldots, n$. Kolika způsoby je lze rozdělit do dvou nerozlišitelných misek tak, aby na každé bylo právě n míčků?
   [Výsledek: $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.]