7. cvičení

1. Nalezněte posloupnost $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ navzájem různých podmnožin v $\mathbb{R}$ takových, že

   (a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-1,1)$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [-2,2]$;

   [Výsledek: např. $A_1 = (-1,1)$, $A_2 = [-2,2]$ a $A_n = (-1-2^{-n}, 1+2^{-n})$ pro $n = 3,4,\ldots$.]

   (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,\infty)$.

   [Výsledek: např. $A_1 = \{1\}$ a $A_n = [0,n)$ pro $n = 2,3,4,\ldots$.]

2. Pro $i,j \in \mathbb{N}$ označme $A_{ij} = \{m \in \mathbb{N} | i \leq m \leq j\}$. Nalezněte $M_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$, $M_2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ a $M_3 = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}$.

   [Výsledek: $M_1 = \mathbb{N}$, $M_2 = \emptyset$; $M_3 = \{1\}$.]

3. Mějme množiny $M_k = \{x \in \mathbb{R} | -k^2 \leq x \leq 2k^2 - 12k + 19\}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Nalezněte $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ a $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$.

   [Výsledek: $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = \mathbb{R}$; $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k = [-1,1]$.]

4. Mějme množiny $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^{2n}$ a $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{2k | k \in \mathbb{N}\}^n$.

   (a) Určete $A \cap B$.

   [Výsledek: $A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{2k | k \in \mathbb{N}\}^{2n}$.]

   (b) Nalezněte, pokud existuje, alespoň jeden prvek z množiny $B \setminus A$.

   [Výsledek: například $(2,2,2)$.]

5. Jsou dány množiny $M_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(m,k) \in \mathbb{Z}^2 | m + k \leq n + 3\}$ a $M_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(m,k) \in \mathbb{Z}^2 | m + k \geq n^2\}$.

   (a) Rozhodněte, který z následujících tří výroků je pravdivý: (i) $M_1 \setminus M_2 \neq \emptyset$; (ii) $M_2 \setminus M_1 \neq \emptyset$; (iii) $M_2 \subseteq M_1$.

   [Výsledek: pravdivé jsou výroky (i) a (iii).]

   (b) Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která jsou množiny $\{(m,k) \in \mathbb{Z}^2 | m + k \leq n + 3\}$ a $\{(m,k) \in \mathbb{Z}^2 | m + k \geq n^2\}$ disjunktní.

   [Výsledek: $n \geq 3$.]

6. Ukažte, že předpis $f(x) = 2x - 1$ definuje prosté zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.