8. cvičení

1. Rozhodněte, zda předpis $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ definuje prosté zobrazení množiny $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ na $\mathbb{R}$.

   [Výsledek: f je prosté, ale ne na.]

2. Najděte zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které

   (a) je prosté a není na;

   [Výsledek: např. $f(n) = n + 1$.]

   (b) je na a není prosté;

   [Výsledek: např. $f(2n) = f(2n - 1) = n$.]

   (c) je prosté i na;

   [Výsledek: např. $f(n) = n$.]

   (d) není ani prosté ani na.

   [Výsledek: např. $f(n) = 1$.]

3. Nalezněte bijekci intervalu $(0, 1)$ na interval $(-3, 2)$.

   [Výsledek: např. $f(x) = 5x - 3$.]

4. Ukažte, že předpis $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$ definuje prosté zobrazení množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$.

5. Nechť $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou bijekce. Ukažte, že potom $g \circ f : A \to C$ je bijekce.

6. Nechť φ je bijekce intervalu $(0, 1)$ na $(0, 1) \times (0, 1)$. Nalezněte funkci $\psi : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ takovou, aby $\psi \circ \varphi$ byla bijekce $(0, 1)$ na $\mathbb{R}^2$.

   [Výsledek: např. $\psi(x, y) = (\mathrm{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2}), \mathrm{tg}(\pi y - \frac{\pi}{2}))$.]

7. Ukažte, že množina všech celých čísel $\mathbb{Z}$ je spočetná.

8. Nalezněte bijekci mezi potenční množinou $\mathcal{P}(X)$ množiny X a množinou všech funkcí z X do $\{0, 1\}$.

   [Výsledek: např. zobrazení, které každé množině $M \in \mathcal{P}(X)$ přiřadí funkci $f : X \to \{0, 1\}$, která je rovna 1 na M a rovna 0 na $X \setminus M$.]