Kombinatorika

1. Kolik značek Morseovy abecedy je možné vytvořit, sestavujeme-li tečky a čárky do skupin o jednom až čtyřech prvcích?

2. V supermarketu mají kávu pěti různých druhů.

   (a) Kolika způsoby je možné provést nákup k balíčků kávy?

   (b) Kolika způsoby je možné provést nákup k balíčků kávy, požadujeme-li, aby v nákupu bylo alespoň po dvou balíčcích každého druhu kávy?

3. V koši je n míčků očíslovaných $1, 2, \ldots, n$. Postupně vytahujeme k z nich ven s navrácením po každém tahu.

   (a) Kolik je všech možných výsledků tahu?

   (b) Kolika způsoby to lze provést tak, aby čísla na tažených míčcích tvořila klesající posloupnost?

4. Knihař má svázat 12 různých knih do desek červené, hnědé a modré barvy. Kolika způsoby to může provést, má-li použít desky každé barvy alespoň jednou?

5. Nechť $M = \{-k, ..., 0, ..., k\}$ a $N = \{1, 2, ..., l\}$, kde $k, l \in \mathbb{N}$. Kolik je sudých funkcí $f : M \to N$ (tj. funkcí $f : M \to N$ splňujících $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in M$)?

6. Kolika způsoby lze rozdělit n stejných bonbónů mezi k dětí, má-li každé dítě dostat alespoň jeden bonbón?

7. Uvažujme posloupnosti sestavené z 0 a 1 délky $2n$ splňující, že za každou 0, která není na konci, následuje bezprostředně 1.

   (a) Je-li $n = 5$, kolik je takových posloupností obsahujících 5 nul?

   (b) Pro obecné $n \geq 1$ určete počet takových posloupností obsahujících $k \leq n$ nul a končících 1.

8. Uvažujme posloupnosti délky n tvořené pouze čísly $0, 1, 2$.

   (a) Určete celkový počet těchto posloupností.

   (b) Kolik z nich je takových, že se v nich vyskytnou všechna tři čísla $0, 1, 2$?

9. Na firemním parkovišti jsou jednotlivá stání uspořádána do řady a jsou očíslována čísly $1, 2, \ldots, n$. Na prázdné parkoviště přijedou tři auta.

   (a) Kolik je způsobů, jak mohou tato auta zaparkovat?

   (b) Kolika způsoby mohou 3 auta parkovat tak, aby žádná dvě nestála těsně vedle sebe?

10. Mějme množinu $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ a tři barvy: bílou, modrou a žlutou. Kolika způsoby lze čísla v množině M obarvit tak, aby

(a) žlutých čísel bylo právě k (na obarvení zbylých čísel nezáleží)?

(b) byly užity alespoň dvě barvy?

11. Uvažujme všechny k-prvkové podmnožiny množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $k \leq n$. Kolik z nich obsahuje číslo k?

12. Na tržišti je v řadě n stánků, které jsou přiděleny n prodejcům. Prodejce A a prodejce B nechtějí mít stánek vedle sebe.

    (a) Kolika způsoby lze prodejcům stánky přidělit, aby prodejci A a B neměli stánek vedle sebe?

    (b) Kolika způsoby lze prodejcům stánky přidělit, aby mezi prodejci A a B byly alespoň 2 stánky?

13. Pavouk má 8 nohou. Na každou si navleče ponožku a botu. Předpokládáme, že botu si navleče na nohu až poté, co má na noze ponožku. Kolika způsoby lze provést proces obouvání (k dispozici má 8 nerozlišitelných bot a 8 nerozlišitelných ponožek)?

14. Včelka Mája a Vilík mají do úlu nanosit 20 džbánků nektaru z květin rostoucích na nedaleké louce. Každý z nich unese pouze jeden džbánek a vždy, když z úlu vyletí, vrátí se s plným džbánkem. Navíc víme, že na louce rostou jen 4 druhy květin a nektar z různých druhů je různý. Kolika způsoby si mohou Mája a Vilík rozdělit práci? Kolika způsoby si mohou Mája a Vilík rozdělit práci, navštíví-li Vilík květ každého druhu nejvíše jednou?

Výsledky

1. 30.
2. (a) $\binom{4+k}{4}$; (b) $\binom{k-6}{4}$ (pro $k \geq 10$; je-li $k < 10$, pak máme 0 možností).
3. (a) n^k; (b) $\binom{n}{k}$.
4. $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3$.
5. $(k+1) \cdot l$.
6. $\binom{n-1}{k-1}$.
7. (a) 6; (b) $\binom{2n-k}{k}$.
8. (a) 3^n; (b) $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.
9. (a) $n(n-1)(n-2)$; (b) $(n-2)(n-3)(n-4)$ pro $n \geq 4$ (pro $n < 4$ je počet možností 0).
10. (a) $\binom{n}{k}2^{n-k}$; (b) $3^n - 3$.
11. $\binom{n-1}{k-1}$.
12. (a) $n! - 2(n-1)(n-2)!$; (b) $n! - 2(n-1)(n-2)! - 2(n-2)(n-2)!$.
13. $\frac{16!}{2^8}$.
14. $\binom{27}{7}$; $\binom{27}{7} - \binom{23}{7} + \binom{19}{3}$.