

13. cvičení z MA1

Matěj Novotný

23.12.2020

Úlohy na cvičení

G1 Vyšetřete součty následujících řad.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+2}{n}\right), \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}, \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-4^n}{5^n}, \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-4)^n}{5^n}$$
$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

G2 Vyšetřete, pro která $z \in \mathbb{C}$ řada konverguje a pokud lze, řadu sečtěte. Znamení i značí imaginární jednotku.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (z-2-i)^n, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-z)^n}{3^n} \cos(n\pi), \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} e^{inz}$$

G3 Vyšetřete konvergenci následujících řad.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + \cos n}{\sqrt{n^7} + 7n^3} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8n^3+n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n+3^n} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{12n}}{3^{n^2}}$$
$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+\sin(3n)}{5+\sin(3n)}\right)^n \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Příklady na samostatné počítání

G4 Vyšetřete konvergenci.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3n}{2n+n^2} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7+1}} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n+2n} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt[3]{n}}$$
$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\dots+2n}{(\sqrt{2})^n} \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+(-1)^n+\sin n}{n^2} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n+4^n}{\lceil \frac{n}{3} \rceil!} \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log(n!)}$$

G5 Pro která $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují? Někde lze použít i kondenzačního kritéria.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{n^\alpha} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(\log n^\alpha)^\beta} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n^\alpha)}}{n^\beta}$$

Výsledky

D=diverguje, K=konverguje, S-srovnávací kritérium, LS-limitní srovnávací, KDZ- kondenzační kritérium.

G4

a)D; LS $\frac{1}{n}$, b)K; LS $\frac{1}{n^{4/3}}$, c)K; S $(\frac{1}{2})^n$, d)K; D'alembert, e)K; LS $\frac{1}{n^{4/3}}$, f)K; Cauchy nebo D'alembert, g)K; LS např. $\frac{1}{n^{3/2}}$, h)K; S $\frac{4^n}{\lceil \frac{n}{3} \rceil!}$, pak D'alembert, i)D; S $\frac{1}{\sqrt{n} \log n}$, pak KDZ.

G5

a) $x \in (-5, 5)$, [geometrická řada], b) $\alpha \in (2, \infty)$, [KDZ], c) $x \in \mathbb{R}$ [D'alembert], d) $\beta \in (1, \infty), \alpha \neq 0$ [KDZ].