

4. cvičení ze MA1

Matěj Novotný

14.10.2020

Úlohy na cvičení

G1 Na příkladu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x \sin \frac{1}{x}) - 1}{x \sin \frac{1}{x}}$$

ukažte, proč jsou důležité předpoklady u věty o limitě složené funkce.

G2 Spočítejte následující limity za využití věty o limitě složené funkce. Ověřte náležitě předpoklady věty. Využijte základních limit pro funkce \sin , e^x .

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(5x^2 - 5)}{x - 1}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}, \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x}, \quad g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{x+1}}{x}, \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{x-1/2} - 2^x}{3^{x-1} - 1}, \quad i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

G3 Těžký příklad.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x}$$

G4 Derivace elementárních funkcí.

$$(x^a)' = \begin{cases} ax^{a-1} & a \neq 0, a \in \mathbb{R} \\ 0 & a = 0, \end{cases} \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

G5 Pomocí řetězkového pravidla či derivace složené funkce odvoďte derivace funkcí:

$$a) f(x) = \operatorname{tg} x, \quad b) f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad c) f(x) = a^x, \quad d) f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

G6 Spočítejte první, případně druhou derivaci funkce f v bodě x , pokud je $f(x)$ rovna

$$a) 3x^2, \quad b) 4 \log x^2, \quad c) \frac{x-1}{x+1}, \quad d) 2^x(e+x), \quad e) \frac{e^x-1}{x}, \quad f) x^2 \sin x, \quad g) \operatorname{cotg} e^x, \quad h) \frac{3^x+4^x}{x^2+1}$$

$$i) \frac{x^3+2}{x^4-2x}, \quad j) \log(x^2+3x+1), \quad k) \sin e^{\operatorname{tg} x}, \quad l) e^{e^{e^x}}, \quad m) \operatorname{tg} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x^2} \right)$$

G7 Vězte, že platí následující vztahy.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

G8 Nalezněte předpis pro tečnu ke grafu funkce f v bodě a , pokud:

$$\text{i) } f(x) = x^2 - 3x + 3, \quad a = 2,$$

$$\text{ii) } f(x) = \sin(3x) + x, \quad a = -\pi,$$

$$\text{iii) } f(x) = e^x - 1, \quad a = 0.$$