1. cvičení z MA1

Matěj Novotný

23.9.2020

Úlohy na cvičení

G1 Nalezněte maximální definiční obory funkcí. Pod značením $\log x$ rozumějte přirozený logaritmus, tj. $\ln x$.

a) $\sqrt{\cos x}$

b) $\cos \sqrt{x}$

c) $\log(\log(x^2 + 3x - 39))$

d) $\frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\log(\sin x \cos x)} = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\log(\frac{1}{2}\sin(2x))}$.

Výsledky
a) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
b) $[0, \infty)$
c) $(-\infty, -8) \cup (5, \infty)$
d) $(-2\pi, -\frac{3}{2}\pi) \cup (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

G2 Znegujte následující výroky a rozhodněte o jejich platnosti.

a) $\forall x, z \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ (x + z)^n \leq 0$

b) $\exists x, z \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ (x^2 + z)^3 \geq \frac{n^2}{x+1}$

c) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} :\ (0 < |x - 1| < \delta) \Rightarrow (0 \leq |x| \leq \varepsilon)$.

Výsledky
a) $\exists x, z \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : (x + z)^n > 0$. Platí negace, volba $x = z = 1$, $n = 1$.
b) $\forall x, z \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : (x^2 + z)^3 < \frac{n^2}{x+1}$. Platí výrok; volím $x = -2, z = 0$, potom je $\forall n \in \mathbb{N}$ výraz $\frac{n^2}{x+1}$ záporný.
c) $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} :\ (0 < |x - 1| < \delta) \wedge (|x| > \varepsilon \vee |x| < 0)$. Platí negace. Zvolím-li $\varepsilon = \frac{1}{2}$, a $x = 1 + \frac{\delta}{2}$, potom je $0 < |x - 1| < \delta$, ale $|x| > \varepsilon$.

G3 Úprava výrazů.

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

Z tohoto vzorce mimo jiné plyne vzorec pro součet geometrické řady:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & q \neq 1, \\ n + 1 & q = 1. \end{cases}$$

G4 Reálná čísla. Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je omezená zdola, pokud existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí $x \geq c,\ x \in M$. Obdobně definujeme omezenost množiny shora. Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ se zove omezená, je-li omezená zdola i shora. Dokažte či vyvraťte následující tvrzení:

a) Množina $U \subseteq \mathbb{R}$ je omezená tehdy a jen tehdy, platí-li $\exists w \in \mathbb{N}\ \forall z \in M :\ (|z| < w)$.

b) Je-li $D \subseteq \mathbb{R}$ omezená, potom je $E := \{x^2,\ x \in D\}$ taktéž omezená.

c) Není-li $H \subseteq \mathbb{R}$ omezená, pak existuje $H_1 \subseteq H$ omezená a $H_2 \subset H$, $H_2 \neq H$ neomezená.