Vzorová písemka z PST

T1 Na technické vysoké škole se čtyřmi fakultami A,B,C,D studuje 13.85% dívek, přičemž na fakultě A je relativní počet dívek třikrát větší než na fakultě B. Na fakultě C studuje 15% dívek (tedy 85% kluků), na fakultě D jich je 10% (tedy 90% kluků). Poměr počtu studentů na jednotlivých fakultách uvádí následující tabulka. Každý student studuje právě na jedné fakultě.

fakulta	A	B	C	D
studentů	10%	35%	24%	31%

a) Jakou máte šanci, že když potkáte studenta z fakulty A, že to bude dívka?

b) Pokud jste právě potkali dívku z technické vysoké školy, na jaké fakultě nejpravděpodobněji/nejméně pravděpodobně studuje? Jaká je šance, že studuje fakultu D?

c) Pokud za závěsem stojí student technické vysoké školy, s jakou pravděpodobností je to kluk studující na fakultě C?

T2 Náhodná veličina X má hustotu s předpisem

$$f_X(t) = \begin{cases} ct \sin t^2 & t \in (0, \sqrt{\pi})\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Určete konstantu c, pravděpodobnost $P(X > \pi)$ a střední hodnotu veličiny $Y = 2X^2 + 1$.

T3 Hodíme 200x šestistěnnou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že bude součet hodů v rozmezí $650 - 720$? Použijte CLV.

Řešení

T1 a) Označme po řadě A, B, C, D jevy, že vybraný student studuje na fakultě A,B,C,D a F, že student je ženského pohlaví. Protože jsou jevy A, B, C, D možné (tj. žádný z nich není nemožný), po dvou disjunktní, a $P(A \cup B \cup C \cup D) = 1$, platí dle věty o úplné pravděpodnosti

$$P(F) = P(F|A) \cdot P(A) + P(F|B) \cdot P(B) + P(F|C) \cdot P(C) + P(F|D) \cdot P(D).$$

Víme, že $P(F|A) = 3P(F|B)$, a dále $P(F|C) = 0.15$, $P(F|D) = 0.1$. Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned}
0.1385 &= 3P(F|B) \cdot 0.1 + P(F|B) \cdot 0.35 + 0.15 \cdot 0.24 + 0.1 \cdot 0.31 \\
0.0715 &= 0.065 \cdot P(F|B) \\
P(F|B) &= 0.11.
\end{aligned}$$

Tedy pravděpodobnost, že náhodně vybraný student z fakulty B je dívka, činí 11%. Z toho plyne, že pravděpodobnost, že náhodně vybraný student z fakulty A je dívka, činí $3 \cdot 11\% = 33\%$.

b) Chceme uspořádat pravděpodobnosti $P(A|F)$, $P(B|F)$, $P(C|F)$, $P(D|F)$ dle velikosti a znát přesnou hodnotu $P(D|F)$. Dle definice dostáváme

$$P(D|F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|D) \cdot P(D)}{P(F)} = \frac{0.1 \cdot 0.31}{0.1385} \doteq 0.224.$$

Tedy pravděpodobnost, že dívka bude studovat na fakultě D, je přibližně rovna 22%. Chceme-li znát pouze uspořádání pravděpodobností, že dívka studuje na té které fakultě, a ne jejich přesné hodnoty, lze porovnávané výrazy jistě pronásobit členem $P(F)$: to na uspořádání nic nezmění. Tedy namísto výrazů $P(A|F)$, $P(B|F), ...$, se budeme zabývat výrazy $P(A \cap F)$, $P(B \cap F), ...$ Máme tedy

$$P(A \cap F) = P(F|A) \cdot P(A) = 0.33 \cdot 0.1 = 0.033$$

a obdobným způsobem zjistíme, že $P(B \cap F) = 0.0385$, $P(C \cap F) = 0.036$ a $P(D \cap F) = 0.031$. Porovnáním zjistíme, že s největší pravděpodobností dívka studuje na fakultě B, naopak nejméně pravděpodobné je, že studuje na fakultě D.

c) Chceme zjistit hodnotu výrazu $P(C \cap \overline{F})$, kde $\overline{X}$ značí doplněk jevu X. Čili

$$P(\overline{F} \cap C) = P(\overline{F}|C) \cdot P(C) = (1 - P(F|C)) \cdot P(C) = 0.85 \cdot 0.24 = 0.204,$$

a tedy pravděpodobnost, že za závěsem stojí kluk z fakulty C, je asi 20%.

Poznámka Všimněte si, že pro libovolné dva jevy A, B, $P(B) > 0$ platí $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B)$. Rozepsáním rovnost snadno dokážete.

T2 Konstantu c určíme ze vztahu

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \text{ d}t = c \int_0^{\sqrt{\pi}} t \cdot \sin(t^2) \text{ d}t = c \left[\frac{-\cos(t^2)}{2} \right]_0^{\sqrt{\pi}} = c.$$

Vzhledem k tomu, že veličina X nabývá pouze hodnot z intervalu $(0, \sqrt{\pi})$, máme $P(X > \pi) = 0$. Alternativně lze také počítat

$$P(x > \pi) = \int_{\pi}^{\infty} f_X(t) \text{ d}t = \int_{\pi}^{\infty} 0 \text{ d}t = 0.$$

Z linearity střední hodnoty plyne $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(2X^2+1) = 2\mathbb{E}X^2+1$, proto počítáme

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{\pi}} t^3 \cdot \sin(t^2)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} z \cdot \sin z\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left([-z\cos z]_0^{\pi} + [\sin z]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Tedy celkem $\mathbb{E}Y = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 = \pi + 1$.

T3 Označme $X_1, ..., X_{200}$ jednotlivé výsledky hodů kostkou a $Y = \sum_{i=1}^{200} X_i$ jejich součet. Jest $\mathbb{E}X_i = 3.5$ a $\mathrm{D}\,X_i = \frac{35}{12}$ (spočítejte si!), proto $\mathbb{E}Y = 700$ a $\mathrm{D}\,Y = \frac{1750}{3}$. Chceme zjistit pravděpodobnost

$$P\left(650 \le Y \le 720\right) = P\left(\frac{650-700}{\sqrt{1750/3}} \le \frac{Y-700}{\sqrt{1750/3}} \le \frac{720-700}{\sqrt{1750/3}}\right).$$

Veličina $U = \frac{Y-700}{\sqrt{1750/3}}$ má podle CLV přibližně normované normální rozdělení, lze tedy psát

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{650-700}{\sqrt{1750/3}} \le U \le \frac{720-700}{\sqrt{1750/3}}\right) &= P\left(\frac{650-700}{\sqrt{1750/3}} < U \le \frac{720-700}{\sqrt{1750/3}}\right) \\
&= P\left(U \le \frac{720-700}{\sqrt{1750/3}}\right) - P\left(U \le \frac{650-700}{\sqrt{1750/3}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{720-700}{\sqrt{1750/3}}\right) - \Phi\left(\frac{650-700}{\sqrt{1750/3}}\right) \\
&= 0.797 - (1 - 0.981) = 0.768.
\end{aligned}$$