Lineární algebra, desáté cvičení

Karel Pospíšil

1 Determinanty-inverzní matice

1.1 Najděte determinant matice a determinant inverzní matice.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

[Rozvojem podle čtvrtého sloupce a Sarrusovym pravidlem: $detA = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 1 + 1 - 1 - 3 - a = 2a - 2,\ detA^{-1} = \frac{1}{2a-2},\ a \neq 1, A^{-1}$ neex, $a = 1$.]

1.2 Pomocí determinantů najděte, pokud existuje, inverzní matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.3 Pomocí determinantů najděte vzhledem k $a \in \mathbb{R}$ inverzní matici.

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Použijeme vzorec $A^{-1} = \frac{1}{detA}(D_{i,j})^T:\ A^{-1} = \frac{1}{3a-8}\begin{pmatrix} 2 & -a & a-6 \\ 3 & -4 & -5 \\ -4 & 2a & 4+a \end{pmatrix},\ a \neq \frac{8}{3}$]

2 Determinanty-soustavy.

2.1 Pomocí Cramerovy věty najděte , je-li to možné, řešení soustavy.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

2.2 Vzhledem k $p \in \mathbb{R}$ najděte řešení soustavy. Kde je to možné, použijte determinanty.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 2 & 2 & 1 \\ 1 & p & 0 & -1 \\ 1 & 0 & p & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & p & 1 \end{array}\right).$$

$[detA = (p-3)(p-1),\ p = 3,\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),\ rankA = 2 \neq 3 = rank\bar{A}$, řešení neexistuje, $p = 1,\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\},\ p \neq 3$ a $p \neq 1,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix}}{detA} \\ \frac{\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix}}{detA} \\ \frac{\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{detA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-3} \\ -\frac{4}{p-3} \\ \frac{1}{p-3} \end{pmatrix}]$