# Lineární algebra, jedenácté cvičení

Karel Pospíšil

## 1 Vlastní hodnoty a vlastní podprostory

### 1.1 Najděte vlastní hodnoty a vlastní podprostory zobrazení.

$A : \mathbb{R}^{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 1}[x],\ A(ax+b) = ax - a + 2b$

[Hledáme vzory, které se zobrazí na své násobky, takže řešíme rovnici $A(ax+b) = \lambda(ax+b)$ tedy $ax - a + 2b = \lambda(ax+b)$. Jde o rovnost polynomů, z ní vyplývá soustava s parametrem $\lambda$ a maticí $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Zajímá nás, kdy má jiné než triviální řešení, hledáme tedy řešení rovnice $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, jsou dvě, $\lambda = 1$ a $\lambda = 2$ , což jsou hledané vlastní hodnoty zobrazení. Pro ně pak hledáme všechna řešení odpovidajících soustav $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tedy $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, takže hledané vlastní podpostory jsou $eigen(1, A) = span(x+1)$ a $eigen(2, A) = span(1)$.]

$A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

[Zde to zkusíme přes matici zobrazení, hledáme vzory, které se zobrazí na své násobky, takže řešíme rovnici $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$, tedy $A\vec{a} - \lambda\vec{a} = \vec{o}$, tedy $(A - \lambda E)\vec{a} = \vec{o}$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice zobrazení. Hledáme tedy netriviální řešení homogenní soustavy s parametrem $\lambda$ a maticí $A - \lambda E$, tedy nejprve řešení rovnice $det(A - \lambda E) = 0$, tedy $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, tedy $\lambda = 0$, což je (jediná) hledaná vlastní hodnota zobrazení. Pro ni pak hledáme všechna řešení odpovidající soustavy $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, takže hledaný vlastní podpostor je $eigen(0, A) = span(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$]

### 1.2 Najděte vlastní hodnoty a vlastní podprostory zobrazení $R_\alpha$, $P_x$, $M_{a,b}$, $S_{a,b}$.

Pozn: $S_{a,b}$ se nazývá zkosení (shear) a platí: $S_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$

## 2 Diagonalizace

### 2.1 Pokud to jde, diagonalizujte matice.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

[Vlastní hodnoty jsou 2 a $-3$, $eigen(2, A) = span(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, $eigen(-3, A) = span(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$. Obě vlastní hodnoty mají násobnost jedna, tomu odpovídají dimenze obou vlastních podprostorů, takže diagonální matice podobná matici $A$ je např.: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Důkazem podobnosti může být rovnost $A = PDP^{-1}$ , kde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , viz vlastní podprostory. Sloupce $P$ jsou prvky báze $B$, vzhledem ke které je $D$ maticí stejného zobrazení jako $A$ vzhledem ke $K_2$. $P$ je vlastně $T_{B\to K_2}$, $P^{-1}$ je $T_{K_2\to B}$]

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

### 2.2 Na dvoustou umocněte matici.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

### 2.3 Najděte nějaké zobrazení $A : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ tak, aby polynom $x^2 + x + 1$ byl jeho vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu dvě.