Lineární algebra, jedenácté cvičení

Karel Pospíšil

1 Vlastní hodnoty a vlastní podprostory

1.1 Najděte vlastní hodnoty a vlastní podprostory zobrazení.

$A : \mathbb{R}^{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 1}[x],\ A(ax+b) = ax - a + 2b$
[Hledáme vzory, které se zobrazí na své násobky, takže řešíme rovnici $A(ax+b) = \lambda(ax+b)$ tedy $ax - a + 2b = \lambda(ax+b)$. Jde o rovnost polynomú, z ní vyplývá soustava s parametrem λ a maticí $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Zajímá nás, kdy má jiné než triviální řešení, hledáme tedy řešení rovnice $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, jsou dvě, $\lambda = 1$ a $\lambda = 2$, což jsou hledané vlastní hodnoty zobrazení. Pro ně pak hledáme všechna řešení odpovidajících soustav $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tedy $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, takže hledané vlastní podpostory jsou $eigen(1, A) = span(x+1)$ a $eigen(2, A) = span(1)$.]

$A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

[Zde to zkusíme přes matici zobrazení, hledáme vzory, které se zobrazí na své násobky, takže řešíme rovnici $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$, tedy $A\vec{a} - \lambda\vec{a} = \vec{o}$, tedy $(A - \lambda E)\vec{a} = \vec{o}$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice zobrazení. Hledáme tedy netriviální řešení homogenní soustavy s parametrem λ a maticí $A - \lambda E$, tedy nejprve řešení rovnice $det(A - \lambda E) = 0$, tedy $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, tedy $\lambda = 0$, což je (jediná) hledaná vlastní hodnota zobrazení. Pro ni pak hledáme všechna řešení odpovidající soustavy $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, takže hledaný vlastní podpostor je $eigen(0, A) = span(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$]

1.2 Najděte vlastní hodnoty a vlastní podprostory zobrazení R_α, P_x, $M_{a,b}$, $S_{a,b}$.

Pozn: $S_{a,b}$ se nazývá zkosení (shear) a platí: $S_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

ŘEŠÍM ROVNICI

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow (R_\alpha - \lambda E_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

HLEDÁM NETRIVIÁLNÍ ŘEŠENÍ

$$\det(R_\alpha - \lambda E_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) - 2\lambda\cos(\alpha) + \lambda^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 = (1-\lambda)^2$$

$$= 1 - 2\lambda\cos(\alpha) + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos(\alpha) \pm \sqrt{4\cos^2(\alpha) - 4}}{2} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{-\sin^2(\alpha)}$$

1) $\alpha = 0$ $\underline{\underline{\lambda_{1,2} = 1}}$ 2) $\alpha = \pi$ $\underline{\underline{\lambda_{1,2} = -1}}$ 3) $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\alpha \neq \pi$ $\underline{\underline{\lambda \text{ NEEX.}}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \underline{\underline{\text{EIGEN}(1, R_0) = \mathbb{R}^2}}$ $\rightarrow \underline{\underline{\text{EIGEN}(-1, R_\pi) = \mathbb{R}^2}}$ $\underline{\underline{\text{VLASTNÍ ČÍSLA ANI VEKTORY NEJSOU}}}$

TYTO VÝSLEDKY JSOU ZŘEJMÉ JIŽ Z GEOMETRICKÉ ÚVAHY, VÝPOČET POSLOUŽÍ SPÍŠ JAKO ROZCVIČKA.

$$S_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & b \\ a & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - ab = 0, \quad \underline{\underline{\lambda_{1,2}}} = \frac{2 \pm 2\sqrt{ab}}{2} = \underline{\underline{1 \pm \sqrt{ab}}}$$

$$1+\sqrt{ab}: \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & b \\ a & -\sqrt{ab} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} R_2 + R_1 \qquad \underline{\underline{\text{EIGEN}(1+\sqrt{ab}, S_{a,b}) = \text{SPAN}\begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}}}$$

zk.: $\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{b} + b\sqrt{a} \\ a\sqrt{b} + \sqrt{a} \end{pmatrix} = (1+\sqrt{ab})\begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}$

$1-\sqrt{ab}$: ... ATD.

2 Diagonalizace

2.1 Pokud to jde, diagonalizujte matice.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

[Vlastní hodnoty jsou 2 a -3, $eigen(2, A) = span(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, $eigen(-3, A) = span(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$. Obě vlastní hodnoty mají násobnost jedna, tomu odpovídají dimenze obou vlastních podprostorů, takže diagonální matice podobná matici A je např.: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Důkazem podobnosti může být rovnost $A = PDP^{-1}$, kde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, viz vlastní podprostory. Sloupce P jsou prvky báze B, vzhledem ke které je D maticí stejného zobrazení jako A vzhledem ke K_2. P je vlastně $T_{B\to K_2}$, P^{-1} je $T_{K_2\to B}$]

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda E_3) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & 8 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1/4 \\ 2R_2 - R_1 \\ 2R_2 - R_1 + 4R_3 \end{matrix}$ $\to EIGEN(3, A) = SPAN\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1/2 \\ R_3 \\ 2R_3 + R_2 \end{matrix}$ $\to EIGEN(1, A) = SPAN\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\to EIGEN(2, A) = SPAN\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

VLASTNÍ ČÍSLA JSOU JEDNONÁSOBNÁ, VLASTNÍ PROSTORY MAJÍ DIMENZE 1.

TEDY DIAGONÁLNÍ MATICE JE NAPŘ. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

MĚLO BY PLATIT $A = PDP^{-1}$, KDE $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ZKUSTE.

2.2 Na dvoustou umocněte matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \mathrm{EIGEN}(1, A) = \mathrm{SPAN}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{EIGEN}(3, A) = \mathrm{SPAN}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

VLASTNÍ ČÍSLA JSOU JEDNONÁSOBNÁ

VLASTNÍ PROSTORY MAJÍ DIMENZE JEDNA

TEDY PLATÍ ROVNOST

$$A = PDP^{-1}$$

KDE

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ZKOUŠKA

$$\underline{PDP^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{A}$$

UMOCNĚNÍ

$$\underline{\underline{A^{200}}} = (PDP^{-1})^{200} = PD\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{E}DP^{-1} \cdot \ldots \cdot PD\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{E}DP^{-1} = PD^{200}P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{200}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{200} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^{200} \\ 0 & 2 \cdot 3^{200} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1+3^{200} \\ 0 & 2 \cdot 3^{200} \end{pmatrix}}}$$

2.3 Najděte nějaké zobrazení $A : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ tak, aby polynom $x^2 + x + 1$ byl jeho vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu dvě.

$$A(x^2+x+1) = 2(x^2+x+1)$$

NAPŘ.

$$A(ax^2+bx+c) = 2ax^2+2bx+2c$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

NEBO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

NEBO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

NEBO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

NEBO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

ATD.