

Lineární algebra, dvanácté cvičení

Karel Pospíšil

1 Skalární součin

1.1 Je dán standartní skalární součin. Najděte skalární součin, velikosti a úhel vektorů. Ověřte Cauchy-Schwarz-Bunyakovského nerovnost ($|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}$).

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4, \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{5},$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}, \cos \phi = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4}{5}, 4 \leq 5]$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.2 Rozhodněte o pozitivní definitnosti matic. Pro ty pozitivně definitní napište příslušné skalární součiny

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

[Symetrická, $|1| = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0$, tedy je pozitivně definitní,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2]$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

[Není symetrická, tedy ani pozitivně definitní.]

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

[Symetrická, $|3| = 3 > 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$, ale $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 64 - 12 < 0$, tedy

není pozitivně definitní]

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

[Symetrická, $|3| = 3 > 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$, ale $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 1 - 12 > 0$, tedy je

pozitivně definitní, $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle = (x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$]

1.3 Najděte skalární součin, pro který jsou dané báze ortonormální.

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

[Matici skalárního součinu najdeme takto: $G = (B^{-1})^T(B^{-1}) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T$.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, kde sloupce B jsou prvky z dané báze.

Zkouška: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$]

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

1.4 V \mathbb{R}^3 ortogonalizujte bázi $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[$C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$, kde $\vec{c}_1 = \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \text{proj}_{\text{span}(\vec{c}_1)} \vec{b}_2 = \vec{b}_2 - \frac{\langle \vec{b}_2 | \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1 | \vec{c}_1 \rangle} \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} -$

$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{14} \\ -\frac{16}{14} \\ -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$, bez narušení ortogonality lze psát $C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$]