Lineární algebra, Třinácté cvičení

Karel Pospíšil

1 Skalární součin

1.1 V $\mathbb{R}^2$ s metrickým tenzorem $\mathbf{E}_2$ ortogonalizujte bázi B.

$$B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

$$[C = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})\ ]$$

1.2 V $\mathbb{R}^3$ s metrickým tenzorem $\mathbf{G}$ ortogonalizujte bázi B (jde o bázi nějakého dvojdimenzionálního podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$).

$$B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})\ , \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$[\ C = (\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \\ -31 \end{pmatrix})]$$

1.3 V $\mathbb{R}^3$ s metrickým tenzorem $\mathbf{G}$ ortonormalizujte bázi B .

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})\ , \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$[\ C = (\tfrac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix})]$$

1.4 V $\mathbb{R}^3$ je dán standartní skalární součin. Najděte matice ortogonálních projekcí na podprostory. Dále spočtěte všechny příslušné ortogonální projekce a rejekce pro vektor $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

a) $\mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, b) $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$.

[a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, projekce: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, rejekce: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, projekce: $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, rejekce: $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$]

1.5 Jde-li to, vypočtěte soustavy metodou nejmenších čtverců.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$, b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$.

[a) $\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{37}{30} \end{pmatrix}$]