Lineární algebra, Třinácté cvičení

Karel Pospíšil

1 Skalární součin

1.1 V $\mathbb{R}^2$ s metrickým tenzorem $\mathbf{E}_2$ ortogonalizujte bázi B.

$B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

$[C = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})\ ]$

1.2 V $\mathbb{R}^3$ s metrickým tenzorem $\mathbf{G}$ ortogonalizujte bázi B (jde o bázi nějakého dvojdimenzionálního podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$).

$$B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \ , \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$[\ C = (\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \\ -31 \end{pmatrix})]$$

1.3 V $\mathbb{R}^3$ s metrickým tenzorem $\mathbf{G}$ ortonormalizujte bázi B .

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\; C = \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right]$$

$B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ $\quad C = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$, C JE ORTOGONÁLNÍ

$$\bar{c}_1 = \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_2 = \bar{b}_2 - \mathrm{PROJ}_{\mathrm{SPAN}(\bar{c}_1)} \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \bar{c}_1 | \bar{b}_2 \rangle}{\langle \bar{c}_1 | \bar{c}_1 \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_3 = \bar{b}_3 - \mathrm{PROJ}_{\mathrm{SPAN}(c_1, c_2)} \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{\langle \bar{c}_1 | \bar{b}_3 \rangle}{\langle \bar{c}_1 | \bar{c}_1 \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle \bar{c}_2 | \bar{b}_3 \rangle}{\langle \bar{c}_2 | \bar{c}_2 \rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{0}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{14}{21} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$, ORTOGONÁLNÍ

$C = \left(\frac{1}{\|\bar{c}_1\|} \bar{c}_1, \frac{1}{\|\bar{c}_2\|} \bar{c}_2, \frac{1}{\|\bar{c}_3\|} \bar{c}_3 \right)$, ORTONORMÁLNÍ

POMOCNÉ VÝPOČTY NÍŽE.

$$\langle \bar{c}_1 | \bar{b}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\langle \bar{c}_1 | \bar{c}_1 \rangle = \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 7$$

$$\langle \bar{c}_1 | \bar{b}_3 \rangle = \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \bar{c}_2 | \bar{b}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 14$$

$$\langle \bar{c}_2 | \bar{c}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 21$$

$$\langle \bar{c}_3 | \bar{c}_3 \rangle = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{---}\,''\,\text{---} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 15$$

1.4 V $\mathbb{R}^3$ je dán standartní skalární součin. Najděte matice ortogonálních projekcí na podprostory. Dále spočtěte všechny příslušné ortogonální projekce a rejekce pro vektor $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

a) $\mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, b) $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

[a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, projekce: $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, rejekce: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix}3&1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3&1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}10&4&-2\\4&4&4\\-2&4&10\end{pmatrix}$, projekce: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}7\\4\\1\end{pmatrix}$, rejekce: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\-10\\5\end{pmatrix}$]

a) $\underline{\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}} = B(B^T B)^{-1} B^T$, KDE $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $\bar{v} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$,

$$\mathrm{PROJ}_{\mathrm{SPAN}(\bar{e}_1,\bar{e}_2)}(\bar{v}) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}}$$

JINÝ POSTUP ($(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ JE ORTOGONÁLNÍ):

$$\mathrm{PROJ}_{\mathrm{SPAN}(\bar{e}_1,\bar{e}_2)}(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{e}_1 | \bar{v}\rangle}{\langle \bar{e}_1 | \bar{e}_1\rangle}\bar{e}_1 + \frac{\langle \bar{e}_2 | \bar{v}\rangle}{\langle \bar{e}_2 | \bar{e}_2\rangle}\bar{e}_2 = \frac{2}{1}\bar{e}_1 + \frac{-1}{1}\bar{e}_2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}}$$

$$\mathrm{REJEKCE} = \bar{v} - \mathrm{PROJEKCE} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}}$$

1.5 Jde-li to, vypočtěte soustavy metodou nejmenších čtverců.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$, b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$.

[a) $\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{37}{30} \end{pmatrix}$]

FINTA: MÍSTO $\bar{b}$ SE DÁ $\mathrm{PROJ}_{\mathrm{SPAN}(A)}(\bar{b})$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ ... $A\bar{x} = \bar{b} \to A\bar{x} = \mathrm{PROJ}_{\mathrm{SPAN}(A)}(\bar{b}) \to$

$A\bar{x} = \mathrm{PROJ}_{\mathrm{SPAN}\left(\binom{1}{3},\binom{2}{4}\right)}(\bar{b}) \to A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T \bar{b} \to$

$\to \bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{b} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 20 & -14 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}}}$

1.6. POMOCÍ NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ PROLOŽTE PŘÍMKU BODY $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

ŘEŠENÍ: HLEDÁM PŘÍMKU $y = ax + b$, DOSADÍM BODY A ZÍSKÁM SOUSTAVU

$$\begin{aligned} 1 &= 0a + b \\ 1 &= 1a + b \\ -1 &= 2a + b \end{aligned}$$

S NEZNÁMÝMI a, b

A MATICÍ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

TA NEMÁ ŘEŠENÍ (ZADANÉ BODY NELEŽÍ NA PŘÍMCE), ALE ŘEŠÍM JI PŘIBLIŽNĚ, VIZ 1.5