Cvičné příklady pro první semestrální test.

První úlohy

Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

1. Množina $\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ tvoří spolu s obvyklými operacemi lineární prostor.
[Neplatí]

2. Lineárně nezávislá množina $\{p(x), q(x), r(x), s(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ tvoří bázi $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.
[Platí]

3. Množina $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ může být lineárně nezávislá.
[Platí]

4. Lineární zobrazeni má neprázdné jádro právě tehdy, když je jeho matice regulární.
[Neplatí]

5. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ nemůže být maticí lineárního zobrazení.
[Neplatí]

6. Odebráním vektoru z lineárně nezávislé množiny nevznikne lineárně závislá množina.
[Platí]

7. Sjednocení lineárních obalů dvou množin je vždy lineární podprostor.
[Neplatí]

8. Průnik podprostoru a jeho lineárního obalu je lineární podprostor.
[Platí]

Druhé úlohy

Definujte pojem ... *Zde bude požadována formulace některé z definic* .

Třetí úlohy

1. V $\mathbb{R}^2$ jsou dány báze $B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix})$, $C = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ a $coord_C(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nalezněte matici $T_{C\to B}$ a $coord_B(\vec{u})$.
$[T_{C\to B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $coord_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}]$

2. V $\mathbb{R}^3$ jsou dány báze $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $C = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ a $coord_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nalezněte matici $T_{B\to C}$ a $coord_C(\vec{u})$.
$[T_{B\to C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $coord_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}]$

3. V $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ jsou dány báze $B = (x^2, x, 1)$, $C = (x^2 + 1, x + 1, 3)$ a $coord_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Nalezněte matici $T_{B\to C}$ a $coord_C(\vec{u})$.
$[T_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $coord_C(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}]$

4. Najděte bázi jádra, defekt a hodnost lineárního zobrazení s maticí **AB**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[báze $ker(A) = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, def(A) = 1, rank(A) = 1$]

5. Je dáno lineární zobrazení f: z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^{\leq 1}[x]$ s maticí $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a lineární zobrazení g: z $\mathbb{R}^{\leq 1}[x]$ do $\mathbb{R}^3$ pro které platí $g(ax + b) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + b \end{pmatrix}$. Pokud existuje, najděte matici složeného zobrazení.
$[\mathbf{G} \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, v opačném pořadí nelze.]