Lineární algebra, druhé cvičení

Karel Pospíšil

1 Soustavy v horním blokovém tvaru.

1.1 Spočtěte a udělejte zkoušku.

$$\begin{array}{llll} x & -3y & +5z & =3 \\ & -y & +z & =3 \\ & & +2z & =4 \end{array}$$

Řešení: Postupujeme odzadu a odspodu. Z posledni rovnice je $z = 2$, dosadíme do předposlední, $-y+2 = 3$, tedy $y = -1$, dosadíme do první rovnice, $x-3\cdot(-1)+5\cdot 2 = 3$, tedy $x = -10$. Výsledek uvedeme ve tvaru: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tedy: V zadání byly tři rovnice tří rovin v $\mathbb{R}^3$, řešení takové soustavy je hledání jejich společných bodů, našli jsme právě jeden, jiné nejsou.

1.2 Spočtěte a udělejte zkoušku.

$$\begin{array}{llll} x & -3y & +5z & =3 \\ & -y & +z & =3 \end{array}$$

Řešení: Postupujeme jako v předchozím případě, s tím rozdílem že volíme z=t, kde t je libovolné reálné číslo. Řešení $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2t \\ -3+t \\ t \end{pmatrix}$ neboli $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ je tedy vlastně parametrická rovnice přímky. Tedy: V zadání byly dvě rovnice dvou rovin v $\mathbb{R}^3$, řešení takové soustavy je hledání jejich společných bodů, tyto body tvoří přímku.

1.3 Spočtěte a udělejte zkoušku.

$$\begin{array}{llll} x & -3y & +5z & =3 \\ & & -z & =3 \end{array}$$

2 Úprava soustav na horní blokový tvar.

2.1 Spočtěte a udělejte zkoušku. Zapisujte řádkové úpravy. Zkuste totéž pomocí přepisu do tabulky. Nulové řádky nevyškrtávejte.

$$\begin{array}{rrl} 5x & -3y & =3 \\ x & -y & =3 \end{array}$$

2.2 Totéž pro soustavu.

$$\begin{array}{rrrl} x & -3y & +5z & =3 \\ 2x & -y & +z & =3 \\ 3x & & +2z & =4 \end{array}$$

2.3 A soustavu.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & =3 \\ 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & =3 \\ 4x_1 & +3x_2 & -6x_3 & +5x_4 & =9 \end{array}$$

2.4 A ještě.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & =3 \\ 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & =3 \\ 4x_1 & +3x_2 & -6x_3 & +5x_4 & =-9 \end{array}$$

3 Teorie, geometrický význam řešení soustav.

3.1 Jsou dány dva různé body v $\mathbb{R}^2$. Napište rovnici přímky, která těmito dvěma body prochází. Potom totéž v $\mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^n$.

3.2 Napište nějakou soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejímž řešením je přímka v $\mathbb{R}^2$, přímka v $\mathbb{R}^3$, rovina v $\mathbb{R}^3$ a prázdná množina v $\mathbb{R}^3$.

4 Geometrické příklady.

4.1 Přímka je dána body A, B . Rovina rovnicí $x+y+z=6$. Najděte jejich společné body.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Velmi jednoduché, z dosazení do rovnice roviny vidíme , že A v rovině leží, B neleží, jediný společný bod je tedy A. Standartnější postup pro méně pěkné příklady: Parametrická rovnice přímky: $X = A + t(B - A)$, po dosazení jejích tří složek do rovnice roviny $6 - 3t = 6$ tedy $t = 0$, po dosazení do parametrické rovnice přímky $X = A + 0(B - A) = A$.