Lineární algebra, druhé cvičení

Karel Pospíšil

1 Soustavy v horním blokovém tvaru.

1.1 Spočtěte a udělejte zkoušku.

$$\begin{aligned} x \quad -3y \quad +5z \quad &= 3 \\ -y \quad +z \quad &= 3 \\ +2z \quad &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: Postupujeme odzadu a odspodu. Z posledni rovnice je $z = 2$, dosadíme do předposlední, $-y+2=3$, tedy $y=-1$, dosadíme do první rovnice, $x-3\cdot(-1)+5\cdot 2=3$, tedy $x=-10$. Výsledek uvedeme ve tvaru: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tedy: V zadání byly tři rovnice tří rovin v $\mathbb{R}^3$, řešení takové soustavy je hledání jejich společných bodů, našli jsme právě jeden, jiné nejsou.

1.2 Spočtěte a udělejte zkoušku.

$$\begin{aligned} x \quad -3y \quad +5z \quad &= 3 \\ -y \quad +z \quad &= 3 \end{aligned}$$

Řešení: Postupujeme jako v předchozím případě, s tím rozdílem že volíme z=t, kde t je libovolné reálné číslo. Řešení $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2t \\ -3+t \\ t \end{pmatrix}$ neboli $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ je tedy vlastně parametrická rovnice přímky. Tedy: V zadání byly dvě rovnice dvou rovin v $\mathbb{R}^3$, řešení takové soustavy je hledání jejich společných bodů, tyto body tvoří přímku.

1.3 Spočtěte a udělejte zkoušku.

$$\begin{aligned} x \quad -3y \quad +5z \quad &= 3 \\ -z \quad &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+3t \\ t \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y = t$

$z = -3$

$x - 3t + 5(-3) = 3$

$x = 18 + 3t$

PARAMETRICKÁ ROVNICE PŘÍMKY p DANÉ BODY A, B:

$p: X = A + t(B-A);\ t \in \mathbb{R}$

A ROVINY Q DANÉ BODY A, B, C:

$Q: X = A + u(B-A) + v(C-A);\ u, v \in \mathbb{R}$

2 Úprava soustav na horní blokový tvar. GEM

2.1 Spočtěte a udělejte zkoušku. Zapisujte řádkové úpravy. Zkuste totéž pomocí přepisu do tabulky. Nulové řádky nevyškrtávejte.

$$\begin{array}{rrl} 5x & -3y & = 3 \\ x & -y & = 3 \end{array}$$

$5x - 3y = 3$

$-2y = 12 \quad 5R_2 - R_1$

$5x - 3(-6) = 3, \; x = -3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

CÍL ÚPRAV: 0 / 0 0

TABULKA:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 5 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 12 \end{array}\right) \; 5R_2 - R_1$$

⋮

ATD.

2.2 Totéž pro soustavu.

$$\begin{array}{rrrll} x & -3y & +5z & = 3 & \\ 2x & -y & +z & = 3 & R_2 - 2R_1 \\ 3x & & +2z & = 4 & R_3 - 3R_1 \end{array}$$

1. CÍL - NULY ZDE 2. CÍL - NULA ZDE

POKRAČUJI TABULKOU

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \\ 0 & 9 & -13 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & -2 \end{array}\right) 9R_2 - 5R_3$$

$5y - \frac{9}{8} = -\frac{24}{8}, \; 5y = -\frac{15}{8}$

$x - 3\left(-\frac{3}{8}\right) + 5\frac{1}{8} = \frac{24}{8}$

$x = \frac{24 - 5 - 9}{8}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{8} \\ -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

2.3 A soustavu.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & = 3 \\ 4x_1 & +3x_2 & -6x_3 & +5x_4 & = 9 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_2-4R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_3-R_2$$

JDE O 2 ROVNICE, VOLÍM: $x_4 = r$, $x_3 = s$

$x_2 + 2s + 3r = +3$, $x_2 = +3 - 2s - 3r$

$x_1 + \cancel{3} - 2s - 3r - s + 2r = \cancel{3}$

$x_1 = +3s + r$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ s, r \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ ŘEŠENÍ JE ROVINA V $\mathbb{R}^4$

2.4 A ještě.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & = 3 \\ 4x_1 & +3x_2 & -6x_3 & +5x_4 & = -9 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ R_3-R_2 \end{array} \rightarrow \text{NEMÁ ŘEŠENÍ}$$

3 Teorie, geometrický význam řešení soustav.

3.1 Jsou dány dva různé body v $\mathbb{R}^2$. Napište rovnici přímky, která těmito dvěma body prochází. Potom totéž v $\mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^n$.

PARAMETRICKÁ:

$p: X = A + t(B - A),\ t \in \mathbb{R}$

OBECNÁ V $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ NENÍ!

V $\mathbb{R}^2$:

$p: x = a_1 + t(b_1 - a_1)$ → ODSUD VYJÁDŘÍM t

$\quad y = a_2 + t(b_2 - a_2)$ → SEM DOSADÍM t

OBECNÁ V $\mathbb{R}^2$ – NÁVOD:

... HOTOVO

3.2 Napište nějakou soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejímž řešením je přímka v $\mathbb{R}^2$, přímka v $\mathbb{R}^3$, rovina v $\mathbb{R}^3$ a prázdná množina v $\mathbb{R}^3$.

ZKUSTE ŘEŠIT!

$x + y = 1$

$x + y + z = 1$
$x + y = 1$

$x + y + z = 1$

$x + y + z = 1$
$x + y + z = 2$

4 Geometrické příklady.

4.1 Přímka je dána body A, B . Rovina rovnicí $x+y+z=6$. Najděte jejich společné body.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Velmi jednoduché, z dosazení do rovnice roviny vidíme , že A v rovině leží, B neleží, jediný společný bod je tedy A. Standartnější postup pro méně pěkné příklady: Parametrická rovnice přímky: $X = A + t(B-A)$, po dosazení jejích tří složek do rovnice roviny $6 - 3t = 6$ tedy $t = 0$, po dosazení do parametrické rovnice přímky $X = A + 0(B-A) = A$.

4.2 TOTÉŽ, ALE MÍSTO PŘÍMKY ROVINA DANÁ BODY A, B, C, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

PARAMETRICKÁ ROVNICE ROVINY:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ROZEPÍŠU:

$x = 2 - t - s$ → SEM DOSADÍM t, s

$y = 1 - 2t$

$z = 3 - 2s$ → ODSUD VYJÁDŘÍM t, s

$t = -\frac{y-1}{2}$

$s = -\frac{z-3}{2}$

$x = 2 + \frac{y-1}{2} + \frac{z-3}{2} \quad | \cdot 2$ → OBECNÁ ROVNICE PRVNÍ ROVINY

$2x = 4 + y + z - 4$

$2x - y - z = 0$

$x + y + z = 6$ → OBECNÁ ROVNICE DRUHÉ ROVINY

→ SOUSTAVA, ŘEŠÍM

$2x - y - z = 0$

$3y + 3z = 12 \quad 2R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$