Cvičné příklady pro druhý semestrální test.

První úlohy

Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

1. Je-li $det(A \cdot B) = 0$ je $det(A) = 0$ nebo $det(B) = 0$.
[Platí]

2. Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ platí $2det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \vec{a} & 2\vec{b} \end{pmatrix}$.
[Platí]

3. Nechť $\vec{x}, \vec{o} \in \mathbb{R}^n$ a A je reálná matice o n sloupcích. Pak soustava $A\vec{x} = \vec{o}$ může mít právě dvě různá netriviální řešení.
[Neplatí]

4. Jestliže pro dvě čtvercové matice druhého řádu A, B platí $a_{1,2} = -b_{1,1}$ a $a_{1,1} = b_{2,1}$ pak A může být inverzní k B.
[Neplatí]

5. Hodnost matice soustavy můze být větší než hodnost rozšířené matice soustavy.
[Neplatí]

6. Pro každou čtvercovou matici A druhého řádu platí $det(2A) = 2det(A)$.
[Neplatí]

7. Hodnost matice soustavy můze být menší než hodnost rozšířené matice soustavy.
[Platí]

8. Jestliže platí $det(A) = 1$ pak $A = E$
[Neplatí]

9. Nechť $\vec{x}, \vec{o} \in \mathbb{R}^n$ a A je reálná matice o n sloupcích. Pak soustava $A\vec{x} = \vec{o}$ může mít jediné netriviální řešení.
[Neplatí]

10. Jestliže pro dvě čtvercové matice druhého řádu A, B platí $a_{2,2} = -b_{1,1}$ a $a_{2,1} = b_{2,1}$ pak A nemůže být inverzní k B.
[Neplatí]

11. Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ platí $det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{-}a \end{pmatrix}$.
[Platí]

12. Nechť $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{b}, \vec{o} \in \mathbb{R}^n$ a A je reálná matice o n řádcích i sloupcích. Platí: Jestliže $\vec{u}$ řeší $A\vec{x} = \vec{b}$ a $\vec{v}$ řeší $A\vec{x} = \vec{o}$ pak $3\vec{u} + \vec{v}$ řeší $A\vec{x} = \vec{b}$.
[Neplatí]

Druhé úlohy

Definujte pojem ... *Zde bude požadována formulace některé z definic* .

Třetí úlohy

1. Řešte soustavu s rozšířenou maticí, výsledek prověřte zkouškou.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p+1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & p+2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

2. Vypočtěte $det(A)$ a $det(A^{-1})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$[-3, -\frac{1}{3}]$

3. Vypočtěte $det(A)$ a $det(A^{-1})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
[0, neexistuje inverzní matice, tedy ani její determinant.]

4. Řešte soustavu s rozšířenou maticí, výsledek prověřte zkouškou.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p+4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & p+2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

6. Najděte matici inverzní k matici A, výsledek prověřte zkouškou.

$$A = \begin{pmatrix} p+4 & 0 & 1 \\ 0 & p+2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Zjistěte pro která p existuje právě jedno řešení soustavy $A\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, kde A je matice z předchozího příkladu, toto řešení pak s využitím výsledku téhož příkladu najděte.