Lineární algebra, třetí cvičení

Karel Pospíšil

1 Prostory a jejich podprostory

1.1 Rozhodněte zda následující množiny tvoří spolu s obvyklými operacemi prostor nad $\mathbb{R}$.

Množina všech reálných funkcí jedné reálné proměnné definovaných na $\mathbb{R}$.

Množina všech reálných funkcí jedné reálné proměnné definovaných na $\mathbb{R}^+$.

Množina všech nekonečných reálných posloupností.

1.2 Rozhodněte zda následující množiny M jsou podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

$M = \{ \begin{pmatrix} r+s \\ r-s \\ 3r \end{pmatrix} | r, s \in \mathbb{R}\}$, $M = \{ \begin{pmatrix} r+s-2 \\ r-s \\ 3+r \end{pmatrix} | r, s \in \mathbb{R}\}$

1.3 Rozhodněte zda množina všech reálných polynomů stupně třetího je podprostorem prostoru všech reálných polynomů nad $\mathbb{R}$.

[Ne.]

1.4 Rozhodněte zda množina všech reálných polynomů stupně nejvýše třetího je podprostorem prostoru všech reálných polynomů nad $\mathbb{R}$.

[Ano.]

2 Lineární závislost a nezávislost

2.1 Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti seznamů vektorů.

$(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ [LZ.],

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ [LN.].

2.2 Nalezněte parametr $a \in \mathbb{R}$ tak, aby množina vektorů byla lineárně závislá.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \right\}$

[$a \in \mathbb{R}$, protože $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$]

Další úlohy na lineární závislost a nezávislost třeba zde

3 Lineární obal

3.1 Určete $span(M)$ v $\mathbb{R}[x]$.

$M = \{x + 3, x^3 - 2x + 4, 1, 0, x^2 + 4x - 7\}$
$[\mathbb{R}^{\leq 3}[x]]$

3.2 Nalezněte množinu A v $\mathbb{R}[x]$ s co nejmenším počtem prvků tak , aby platilo $span(A) = span(M)$ pro M z předchozího příkladu. Existuje víc řešení?

[Třeba $A = \{x^3, x^2, x, 1\}$. Ano, třeba $A = \{2x^3, x^2, x + 2, 1\}$..]

3.3 Nalezněte množinu M v $\mathbb{C}^4$ s co nejmenším počtem prvků tak, aby platila rovnost.

$$span(M) = \{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} | r, s, t \in \mathbb{C} \}$$

[Nad tělesem $\mathbb{R}$ třeba $A = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Nad tělesem $\mathbb{C}$ třeba $A = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.]