Lineární algebra, třetí cvičení

Karel Pospíšil

1 Prostory a jejich podprostory

1.1 Rozhodněte zda následující množiny tvoří spolu s obvyklými operacemi prostor nad $\mathbb{R}$.

Množina všech reálných funkcí jedné reálné proměnné definovaných na $\mathbb{R}$.

Množina všech reálných funkcí jedné reálné proměnné definovaných na $\mathbb{R}^+$.

Množina všech nekonečných reálných posloupností.

1.2 Rozhodněte zda následující množiny M jsou podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$M = \{\begin{pmatrix} r+s \\ r-s \\ 3r \end{pmatrix} | r,s \in \mathbb{R}\}, M = \{\begin{pmatrix} r+s-2 \\ r-s \\ 3+r \end{pmatrix} | r,s \in \mathbb{R}\}$$

1) M JE NEPRÁZDNÁ PODMNOŽINA $\mathbb{R}^3$?

ANO, $M \subseteq \mathbb{R}^3$ A NAPŘ. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

2) M JE UZAVŘENA NA SČÍTÁNÍ?

ANO, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in M$ PLATÍ $\bar{u} + \bar{v} \in M$

$$\begin{pmatrix} r+s \\ r-s \\ 3r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r'+s' \\ r'-s' \\ 3r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r+r')+(s+s') \\ (r+r')-(s+s') \\ 3(r+r') \end{pmatrix}$$

$\bar{u}+\bar{v}$ VZNIKLO ZE DVOU REÁLNÝCH ČÍSEL $r+r'$ A $s+s'$ PODLE VZORCE PRO PRVKY M (SEČTENÍ, ODEČTENÍ, TROJNÁSOBEK PRVNÍHO), TEDY

3) M JE UZAVŘENA NA REÁLNÝ NÁSOBEK?

ANO, $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \bar{u} \in M$ PLATÍ $k\bar{u} \in M$

ZKUSTE SAMI DLE 2)

ZDE STAČÍ VYVRÁTIT 1) NEBO 2) NEBO 3)

1) ANO

2) NE

3) NE

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ A NAPŘ. $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in M$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} r+s-2 \\ r-s \\ 3+r \end{pmatrix}; r,s \in \mathbb{R}$$

$$0\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} r+s-2 \\ r-s \\ 3+r \end{pmatrix}$$

$r=3$, $s=3$, $6-2 \neq -4$

$r=-3$, $s=-3$, $-6-2 \neq 0$

$\Rightarrow$ M NENÍ PODPROSTOR $\mathbb{R}^3$

M JE PODPROSTOR $\mathbb{R}^3$

1.3 Rozhodněte zda množina všech reálných polynomů stupně třetího je podprostorem prostoru všech reálných polynomů nad $\mathbb{R}$.

[Ne.] PROTOŽE NAPŘ.: $\underbrace{\underset{\in M}{(x^3)} + \underset{\in M}{(-x^3+x^2+1)} = \underset{\notin M}{x^2+1}}$

NECHŤ M JE ZADANÁ MNOŽINA

$\Downarrow$

M NENÍ UZAVŘENA NA SOUČET

1.4 Rozhodněte zda množina všech reálných polynomů stupně nejvýše třetího je podprostorem prostoru všech reálných polynomů nad $\mathbb{R}$.

[Ano.] ZADANOU MNOŽINU BUDEME ZNAČIT $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$

1) $\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \neq \emptyset$?

ANO, NAPŘ.: $x^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$

2) $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ JE UZAVŘENÁ NA SČÍTÁNÍ?

ANO, $\forall P(x), Q(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$; $\deg(P(x)+Q(x)) \leq 3$ TEDY $P(x)+Q(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$

2 Lineární závislost a nezávislost

2.1 Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti seznamů vektorů.

PRO $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ŘEŠÍM ROVNICI:

$$\alpha \bar{u} + \beta \bar{v} + \gamma \bar{w} = \bar{o}$$

$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ [LZ.],

OZNAČÍM: $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\2 & 2 & -2\\3 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\0 & -4 & 8\\0 & -8 & 16\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2-2R_1\\R_3-3R_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-R_2/4\\R_3-2R_2\end{matrix}$$

ŘEŠENÍ JE NAPŘ.: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ → EXISTUJE NETRIVIÁLNÍ LINEÁRNÍ KOMBINACE $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ROVNÁ $\bar{o}$ → $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ JSOU LZ

OZNAČÍM: $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ [LN.].

POSTUP JAKO 2.1

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\2 & 2 & 0\\3 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\0 & 2 & 10\\0 & 1 & 15\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2-2R_1\\R_3-3R_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\0 & 1 & 5\\0 & 0 & 20\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2/2\\2R_3-R_2\end{matrix}$$

EXISTUJE JEDINÉ ŘEŠENÍ: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ → EXISTUJE POUZE TRIVIÁLNÍ LINEÁRNÍ KOMBINACE $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ROVNÁ $\bar{o}$ → $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ JSOU LN

2.2 Nalezněte parametr $a \in \mathbb{R}$ tak, aby množina vektorů byla lineárně závislá.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

[$a \in \mathbb{R}$, protože $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$]

VEKTORY JSOU LZ $\Longleftrightarrow$ ASPOŇ JEDEN Z NICH JE LK OSTATNÍCH

Další úlohy na lineární závislost a nezávislost třeba zde

3 Lineární obal

3.1 Určete $span(M)$ v $\mathbb{R}[x]$.

TŘI Z MOŽNÝCH TVARŮ, POSLEDNÍ NEJHEZČÍ:

$M = \{x+3, x^3-2x+4, 1, 0, x^2+4x-7\}$

$[\mathbb{R}^{\leq 3}[x]]$

$$span(M) = \{\alpha(x+3)+\beta(x^3-2x)+\gamma(1)+\delta(0)+\varepsilon(x^2+4x-7);\ \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\alpha(x+3)+\beta(x^3-2x)+\gamma(1)+\varepsilon(x^2+4x-7);\ \alpha,\beta,\gamma,\varepsilon \in \mathbb{R}\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^{\leq 3}[x]}}$$

ZJISTÍM LN, LZ: $\alpha(x+3)+\beta(x^3-2x)+\gamma(1)+\varepsilon(x^2+4x-7) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & \beta = 0 \\ x^2: & \varepsilon = 0 \\ x^1: & \alpha - 2\beta + 4\varepsilon = 0 \\ x^0: & 3\alpha + \gamma - 7\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

JEDINÉ ŘEŠENÍ: $\rightarrow$ LN

3.2 Nalezněte množinu A v $\mathbb{R}[x]$ s co nejmenším počtem prvků tak , aby platilo $span(A) = span(M)$ pro M z předchozího příkladu. Existuje víc řešení?

[Třeba $A = \{x^3, x^2, x, 1\}$. Ano, třeba $A = \{2x^3, x^2, x+2, 1\}$..], NEBO TAKY $M \setminus \{0\}$

BUDE TO JAKÁKOLIV BÁZE $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. VIZ. 3.1.

3.3 Nalezněte množinu M v $\mathbb{C}^4$ s co nejmenším počtem prvků tak, aby platila rovnost.

$$span(M) = \{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} | r, s, t \in \mathbb{C} \}$$

V $\mathbb{C}^4$ NAD $\mathbb{R}$: $(a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bj \\ c+dj \\ e+fj \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}$$

V $\mathbb{C}^4$ NAD $\mathbb{C}$: $(r,s,t \in \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Nad tělesem $\mathbb{R}$ třeba $A = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Nad tělesem $\mathbb{C}$ třeba $A = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.]