

# Lineární algebra, čtvrté cvičení

Karel Pospíšil

## 1 Báze a dimenze

1.1 Rozhodněte zda následující množiny jsou báze lineárního prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$ .

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ [Ano, tři LN prvky ve trojdimenzionálním prostoru.]}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ [Ne, čtyři prvky ve trojdimenzionálním prostoru nemohou tvořit LN množinu.]}$$

1.2 Rozhodněte zda následující seznamy jsou uspořádané báze lineárního prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$ .

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ [Ne, seznam je LZ.]}$$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ [Ne, dva prvky nemohou generovat trojdimenzionální prostor .]}$$

1.3 Nalezňte dvě různé báze lineárního prostoru všech reálných polynomů stupně druhého nebo menšího nad  $\mathbb{R}$ .

[Např.  $\{x^2, x, 1\}, \{x^2 + x + 1, x, 1\}$ ].

1.4 Zjistěte dimenzi  $\mathbb{C}^2$ , je-li  $\mathbb{C}^2$  lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{R}$ .

[ $\dim(\mathbb{C}^2) = 4$ , báze je např.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix} \right\}$ ].

1.5 Zjistěte dimenzi  $\mathbb{C}^2$ , je-li  $\mathbb{C}^2$  lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{C}$ .

[ $\dim(\mathbb{C}^2) = 2$ , báze je např.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ].

1.6 Je  $L = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \mid p(2) = 0\}$  lineární prostor? Pokud ano, najděte nějakou jeho bázi a určete jeho dimenzi.

[Ano,  $\{x^2 - 4, x - 2\}$ ,  $\dim(L) = 2$ ]

## 2 Souřadnice

2.1 Najděte souřadnice vektoru  $\vec{a}$  v  $\mathbb{R}^2$  vzhledem k uspořádané bázi  $B$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

[ $\text{Coord}_B(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , protože  $\vec{a} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ]

2.2 Najděte souřadnice vektoru  $\vec{a}$  v  $\mathbb{R}^3$  vzhledem k uspořádané bázi  $B$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

2.3 V prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$  nad  $\mathbb{R}$  najděte souřadnice polynomu  $3x^2 - 2$  vzhledem k následujícím bázím .

$(x^2, x, 1)$ ,  $(x^2 - 3, -x, 6)$ ,  $(x^2 + x + 1, x^2 + 2x - 2, x^2 + 3x - 1)$ ,

2.4 Najděte  $\text{coord}_C(\vec{u})$ , je-li

$$\text{coord}_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Další úlohy na báze, dimenze a souřadnice třeba [zde](#)