Lineární algebra, čtvrté cvičení

Karel Pospíšil

1 Báze a dimenze

1.1 Rozhodněte zda následující množiny jsou báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

$\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$ [Ano, tři LN prvky ve trojdimenzionálním prostoru.],

OVĚŘENÍ LN:

ROVNICE MÁ JEDINÉ ŘEŠENÍ

$$\boxed{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&-3&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&-4&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2-R_1\\R_3-R_1\end{matrix} \to \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \underline{\underline{LN}}$$

$\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\}$ [Ne, čtyři prvky ve trojdimenzionálním prostoru nemohou tvořit LN množinu.].

1.2 Rozhodněte zda následující seznamy jsou uspořádané báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

$(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix})$ [Ne, seznam je LZ.] ,

ROVNICE MÁ NETRIVIÁLNÍ ŘEŠENÍ, NAPŘ:

OVĚŘENÍ LN:

JAKO 1.1 ......

$$\begin{pmatrix}1&1&4\\1&0&3\\1&-3&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&4\\0&-1&-1\\0&-4&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2-R_1\\R_3-R_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-R_2\\R_3-4R_2\end{matrix} \to \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} \to \underline{\underline{LZ}}$$

$(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})$ [Ne, dva prvky nemohou generovat trojdimenzionální prostor .].

1.3 Nalezněte dvě různé báze lineárního prostoru všech reálných polynomů stupně druhého nebo menšího nad $\mathbb{R}$.

[Např. $\{x^2, x, 1\}, \{x^2 + x + 1, x, 1\}$].

JDE O KVADRATICKÉ TROJČLENY: ax^2+bx+c; $a, b, c \in \mathbb{R}$,
TEDY O VŠECHNY LINEÁRNÍ KOMBINACE POLYNOMŮ $x^2, x, 1$,
TEDY $\mathrm{SPAN}(\{x^2, x, 1\}) = \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, PŘITOM $\{x^2, x, 1\}$ JE LN (OVĚŘTE!)
TEDY $\underline{B = \{x^2, x, 1\}}$ JE BÁZE.
DALŠÍ BÁZI NAJDU TŘEBA TAK, ŽE i-TÝ PRVEK B NAHRADÍM i-TÝM LINEÁRNÍ KOMBINACÍ PRVKŮ B S NENULOVÝM KOEFICIENTEM.

1.4 Zjistěte dimenzi $\mathbb{C}^2$, je-li $\mathbb{C}^2$ lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

$[dim(\mathbb{C}^2) = 4$, báze je např. $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}j\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\j\end{pmatrix}\}]$.

JDE O KOMPLEXNÍ DVOJICE $\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{C}$, NAD $\mathbb{R}$ LZE VYTÝKAT JEN REÁLNÁ ČÍSLA, TEDY

$$\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+jb\\c+jd\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}j\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\j\end{pmatrix};\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{SPAN}\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}j\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\j\end{pmatrix}\} = \mathbb{C}^2$, $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}j\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\j\end{pmatrix}\}$ JE LN (OVĚŘÍM),
TEDY A DIMENZE JE POČET PRVKŮ V BÁZI,
TEDY

OVĚŘENÍ LN:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}j\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

POROVNÁM REÁLNÉ A IMAGINÁRNÍ ČÁSTI VLEVO A VPRAVO:
$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$ JEN TRIV. ŘEŠ. $\rightarrow$ $\underline{\text{LN}}$

1.5 Zjistěte dimenzi $\mathbb{C}^2$, je-li $\mathbb{C}^2$ lineární prostor nad tělesem $\mathbb{C}$.

$[dim(\mathbb{C}^2) = 2$, báze je např. $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}]$.

JAKO 1.4 ALE MOHU VYTÝKAT KOMPLEXNÍ ČÍSLA

1.6 Je $L = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 2}[x] | p(2) = 0\}$ lineární prostor? Pokud ano, najděte nějakou jeho bázi a určete jeho dimenzi.

[Ano, $\{x^2 - 4, x - 2\}$, $dim(L) = 2$]

L JE PODPROSTOR $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ (OVĚŘTE SAMI NEBO VIZ VIDEO)

$\to$ L JE PROSTOR

NAPŘ: $x^2-7 \in \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ ALE $x^2-7 \notin L$

$dim(L) \leq dim(\mathbb{R}^{\leq 2}[x]) = 3$, $L \neq \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to dim(L) < 3$

TEDY PŘI HLEDÁNÍ BÁZE HLEDÁM LN PRVKY L V POČTU ≤ 2 $\to$ BÁZE JE NAPŘ: $\{x^2-4, x-2\}$

$dim(L) = 2$

JINÝ POSTUP:

PRVKY L MAJÍ KOŘEN 2 $\to$ JSOU DĚLITELNÉ $x-2$

$(ax^2+bx+c) : (x-2) = ax + 2a + b$

$0 + (2a+b)x + c$

$0 + 4a + 2b + c = 0 \to c = -4a - 2b$

TEDY

$L = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 2}[x] ; p(2) = 0\} = \{ax^2 + bx + c ; a, b, c \in \mathbb{R} \text{ a } c = -4a-2b\}$

$= \{ax^2 + bx - 4a - 2b ; a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(x^2-4) + b(x-2) ; a, b \in \mathbb{R}\}$

TEDY BÁZE JE NAPŘ: $\{x^2-4, x-2\}$, $dim\, L = 2$

POZN: TOTÉŽ ZÍSKÁM PO DOSAZENÍ 2 DO $ax^2+bx+c=0$ (2 JE KOŘEN)

$\rightarrow a\cdot 4+b\cdot 2+c \rightarrow c=-4a-2b$

2 Souřadnice

2.1 Najděte souřadnice vektoru $\vec{a}$ v $\mathbb{R}^2$ vzhledem k uspořádané bázi B.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})$

$[Coord_B(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože $\vec{a} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}]$

B JE BÁZE $\rightarrow \bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; α, β JSOU DÁNY JEDNOZNAČNĚ A NAZÝVÁME JE SOUŘADNICE, ZNAČÍME $coord_B(\bar{a})$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{array}\right) R_2 - 2R_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad coord_B(\bar{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Najděte souřadnice vektoru $\vec{a}$ v $\mathbb{R}^3$ vzhledem k uspořádané bázi B.

POSTUP VIZ 2.1

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad coord_B(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 15 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 20 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2/2 \\ 2R_3 - R_2 \end{array}$$

$\beta - 2 = -2$

$\alpha + 2 = 1$

$$\rightarrow coord_B(\bar{a}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2.3 V prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ nad $\mathbb{R}$ najděte souřadnice polynomu $3x^2 - 2$ vzhledem k následujícím bázím .

$(x^2, x, 1)$, $(x^2 - 3, -x, 6)$, $(x^2 + x + 1, x^2 + 2x - 2, x^2 + 3x - 1)$,

OZNAČÍME: B, C, D

$3x^2 - 2 = 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-2) \cdot 1$, $coord_B(3x^2-2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$3x^2 - 2 = 3 \cdot (x^2 - 3) + 0(-x) + \frac{7}{6} 6$, $coord_C(3x^2-2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$

$3x^2 - 2 = \alpha(x^2+x+1) + \beta(x^2+2x-2) + \gamma(x^2+3x-1)$, $coord_D(3x^2-2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

DÚ – NAJDI α, β, γ

2.4 Najděte $coord_C(\vec{u})$, je-li

$coord_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})$, $C = (\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})$.

$\vec{u} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $coord_C(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & 13 \end{array}\right) \quad R_2 - 3R_1$$

$-\alpha - \frac{39}{8} = -\frac{40}{8}$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{13}{8} \end{pmatrix}$

$coord_C(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{13}{8} \end{pmatrix}$

Další úlohy na báze, dimenze a souřadnice třeba zde