Lineární algebra, páté cvičení

Karel Pospíšil

1 Maticové počítání

1.1 Spočtěte, pokud to jde.

$$3\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -4 & 3 & -2\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -4 & 3 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -4 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

2 Lineární zobrazení

2.1 Ověřte linearitu zobrazení.

$\mathbf{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\quad,\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\a-b\end{pmatrix}$

[Je lineární. Zachovává násobení $\mathbf{A}(k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix})=\mathbf{A}\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka+kc\\ka-kb\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a+c\\a-b\end{pmatrix}=$ $k\mathbf{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a sčítání $\mathbf{A}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix})=\mathbf{A}\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\\c+c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a'+c+c'\\a+a'-(b+b')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\a-b\end{pmatrix}+$ $\begin{pmatrix}a'+c'\\a'-b'\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\mathbf{A}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$.]

$\mathbf{A}:\mathbb{R}^{\leq 2}[x]\to\mathbb{R}^{\leq 2}[x]\quad,\quad \mathbf{A}(ax^2+bx+c)=(a+b+c)x^2+(a+3b)x+(b-c)$

[Je lineární.]

2.2 Pro lineární zobrazení $\mathbf{A}$ a vektor $\vec{u}$ najděte $\mathbf{A}(\vec{u})$.

$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\quad,\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$

[Známe obrazy prvků báze, vektor napíšeme jako lineární kombinaci těchto prvků, jeho obrazem je tatáž lineární kombinace (se stejnými koeficienty) jejich obrazů.

$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{A}(\vec{u})=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\18\end{pmatrix}$]

3 Lineární transformace v rovině

3.1 Najděte matice rotace o úhel α ($\mathbf{R}_\alpha$), projekce na osu x ($\mathbf{P}_x$) a změny měřítka ($\mathbf{M}_{a,b}$).

3.2 Dokažte, že translace o vektor $\vec{u}$ není lineární zobrazení.

3.3 Nakreslete, co dělají daná zobrazení s prvky kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^2$.

$\mathbf{R}_{30^\circ}$, $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_{2,3}$

3.4 Najděte matice daných zobrazení a nakreslete, co dělají tato zobrazení s prvky kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^2$.

$\mathbf{R}_{30^\circ}\cdot\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y\cdot\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_{2,3}\cdot\mathbf{R}_{-30^\circ}$, $\mathbf{R}_{30^\circ}\cdot(\mathbf{M}_{2,3}+\mathbf{P}_x)$

4 Náznak počítačové grafiky

4.1 Vyberte čtyři body v rovině tak , aby připomínaly písmeno Y . Dejte je do sloupců matice A. Promyslete geometrický význam matic $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{A}$, případně dalších.

Další úlohy na lineární zobrazení třeba zde