Lineární algebra, páté cvičení

Karel Pospíšil

1 Maticové počítání

1.1 Spočtěte, pokud to jde.

$$3\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -4 & 3 & -2\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -12 & 9 & -6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20 & 40 & -60\\ 0 & -50 & 0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}23 & 34 & -57\\ -12 & -41 & -6\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -4 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boxed{1\cdot 1+(-2)\cdot 2+1\cdot 0} & \boxed{1\cdot 1+(-2)\cdot 0+1(-1)}\\ \boxed{(-4)\cdot 1+3\cdot 2+(-2)\cdot 0} & \boxed{(-4)\cdot 1+3\cdot 0+(-2)(-1)}\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}}}$$

TYP : 2,3 · 3,2 = 2,2

ROVNOST ZELENÝCH $\leftrightarrow$ EXISTENCE SOUČINU

ŽLUTÉ URČÍ TYP VÝSLEDKU

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -4 & 3 & -2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}}}$$

3,2 · 2,3 = 3,3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$3,2 \cdot 2,1 = 3,1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$2,1 \cdot 3,2$

$1 \neq 3 \longrightarrow$ NELZE, ALE OPAČNĚ JO!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$2,1 \cdot 1,2 = 2,2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$1,2 \cdot 2,1 = 1,1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

$3,3 \cdot 3,3 = 3,3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$3,3 \cdot 3,3 = 3,3$

ZE VŠECH PŘEDCHOZÍCH ÚLOH VIDÍME, ŽE NÁSOBENÍ MATIC NENÍ KOMUTATIVNÍ !!!

2 Lineární zobrazení

2.1 Ověřte linearitu zobrazení.

$$\mathbf{A}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ a-b \end{pmatrix}$$

[Je lineární. Zachovává násobení $\mathbf{A}(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka+kc \\ ka-kb \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a+c \\ a-b \end{pmatrix} = k\mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a sčítání $\mathbf{A}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a'+c+c' \\ a+a'-(b+b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+c' \\ a'-b' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.]

PLATÍ: ZOBRAZENÍ JE LINEÁRNÍ

$\Updownarrow$

OBRAZ NÁSOBKU JE NÁSOBEK OBRAZU A
OBRAZ SOUČTU JE SOUČET OBRAZŮ.

JINAK: ZOBRAZENÍ JE LINEÁRNÍ

$\Updownarrow$

OBRAZ LINEÁRNÍ KOMBINACE JE LINEÁRNÍ KOMBINACE OBRAZŮ.

$\mathbf{A} : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, $\mathbf{A}(ax^2+bx+c) = (a+b+c)x^2 + (a+3b)x + (b-c)$
[Je lineární.]

$$A\left((ax^2+bx+c)+(a'x^2+b'x+c')\right) = A\left((a+a')x^2+(b+b')x+(c+c')\right) =$$

$$= (a+a'+b+b'+c+c')x^2 + (a+a'+3(b+b'))x + (b+b'-(c+c')) =$$

$$= \underbrace{(a+b+c)x^2+(a+3b)x+(b-c)}_{} + \underbrace{(a'+b'+c')x^2+(a'+3b')x+(b'-c')}_{} =$$

$$= A(ax^2+bx+c) + A(a'x^2+b'x+c')$$

$$A\left(k(ax^2+bx+c)\right) = \text{DÚ DOPLŇ!} \;\ldots = kA(ax^2+bx+c)$$

$A(x^2) = x^2+x$

$A(x) = x^2+3x+1$

$A(1) = x^2 - 1$

OBRAZY PRVKŮ K_3

$\mathrm{coord}_{K_3}(x^2+x) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\mathrm{coord}_{K_3}(x^2+3x+1) = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$

$\mathrm{coord}_{K_3}(x^2-1) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

JEJICH COORD_{K_3}

VÝPOČET MATICE ZOBRAZENÍ VZHLEDEM KE $K_3 = \{x^2, x, 1\}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

SLOUPCE MATICE

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c\\ a+3b\\ b-c\end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathrm{COORD}_{K_3}(P(x)) = \mathrm{COORD}_{K_3}(A(P(x)))$$

DÚ-ŘEŠENÍ: $A\left(k(ax^2+bx+c)\right) = A\left((ka)x^2+(kb)x+(kc)\right) =$ ZDE UŽIJI VZOREC ZOBRAZENÍ

$$= (ka+kb+kc)x^2 + (ka+3kb)x + (kb-kc) = k\left((a+b+c)x^2+(a+3b)x+(b-c)\right) =$$

$$= k\left(A(ax^2+bx+c)\right)$$

2.2 Pro lineární zobrazení $\mathbf{A}$ a vektor $\vec{u}$ najděte $\mathbf{A}(\vec{u})$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$$

[Známe obrazy prvků báze, vektor napíšeme jako lineární kombinaci těchto prvků, jeho obrazem je tatáž lineární kombinace (se stejnými koeficienty) jejich obrazů.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{A}(\vec{u}) = 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\18\end{pmatrix}$$]

NEBO NAJDU MATICI A, POTOM $A(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$.

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 0 & 2\\3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

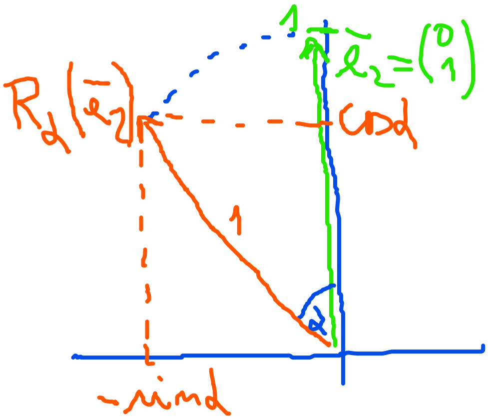
OBRAZY PRVKŮ K_3 = JEJICH COORD_{K_3} = SLOUPCE A

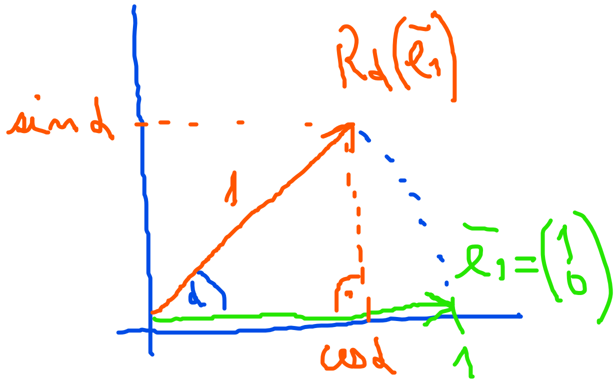
3 Lineární transformace v rovině

3.1 Najděte matice rotace o úhel α $(\mathbf{R}_\alpha)$, projekce na osu x $(\mathbf{P}_x)$ a změny měřítka $(\mathbf{M}_{a,b})$.

$$R_\alpha\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = R_\alpha\left(a(\bar{e}_1)+b(\bar{e}_2)\right) = aR_\alpha(\bar{e}_1)+bR_\alpha(\bar{e}_2) = \left(R_\alpha(\bar{e}_1), R_\alpha(\bar{e}_2)\right)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = R_\alpha\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

MATICE ROTACE





$$\underline{R_\alpha} = \left(R_\alpha(\bar{e}_1), R_\alpha(\bar{e}_2)\right) = \left(R_\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, R_\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}}$$

3.2 Dokažte, že translace o vektor $\vec{u}$ není lineární zobrazení.

3.3 Nakreslete, co dělají daná zobrazení s prvky kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^2$.

$\mathbf{R}_{30^\circ}$, $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_{2,3}$

3.4 Najděte matice daných zobrazení a nakreslete, co dělají tato zobrazení s prvky kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^2$.

$\mathbf{R}_{30^\circ} \cdot \mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y \cdot \mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_{2,3} \cdot \mathbf{R}_{-30^\circ}$, $\mathbf{R}_{30^\circ} \cdot (\mathbf{M}_{2,3} + \mathbf{P}_x)$

4 Náznak počítačové grafiky

4.1 Vyberte čtyři body v rovině tak , aby připomínaly písmeno Y . Dejte je do sloupců matice A. Promyslete geometrický význam matic $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{A}$, případně dalších.

Další úlohy na lineární zobrazení třeba zde