Lineární algebra, šesté cvičení

Karel Pospíšil

1 Lineární zobrazení

1.1 Najděte jádro, obraz, hodnost a defekt lineárního zobrazení .

$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ a-b \end{pmatrix}$

[Možný postup pro výpočet vycházející přímo z definice jádra je vyřešit soustavu $\begin{pmatrix} a+c \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pak $ker(A) = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}),\ def(A) = 1,\ im(a) = \mathbb{R}^2,\ rank(A) = 2$]

$\mathbf{A} : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \quad , \quad \mathbf{A}(ax^2 + bx + c) = (a+b+c)x^2 + (a+3b)x + (b-c)$

$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

[Vyrobíme matici zobrazeni vzhledem ke K_3 . Její sloupce jsou souřadnice obrazů prvků K_3 vzhledem ke K_3, tedy přímo obrazy prvků K_3 , což pro $\vec{e}_1$ je vidět ze zadání, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{e}_1$, tedy $A(\vec{e}_2) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy $A(\vec{e}_3) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Matice je tedy $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Jádro je řešení homogenní soustavy dané touto maticí, které je jednodimenziální tedy $ker(A) = span\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ def(A) = 1,\ im(a) = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}),\ rank(A) = 2.$]

$\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \quad , \quad \mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$

1.2 Ukažte, že pro libovolnou regulární matici $\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ a libovolnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ platí rovnosti: $def(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = def(\mathbf{A})$ a $rank(\mathbf{MA}) = rank(\mathbf{A})$.

Návod: nejprve dokažte, že $ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = ker(\mathbf{A})$. Pak použijte definici defektu a větu o dimensi jádra a obrazu.

2 Matice vzhledem k bázi

2.1 Spočtěte matice rotace, změny měřítka, projekce na osy a zkosení vzhledem k bázi $B = (\vec{e}_2, \vec{e}_1)$. Kreslete obrázky.

2.2 Najděte matici lineárního zobrazení $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$ vzhledem k bázi $(x^3, x^2, x, 1)$

2.3 Najděte matici lineárního zobrazení $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$ vzhledem k bázi $(1, x, x^2, x^3)$

2.4 Najděte matici lineárního zobrazení $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$ vzhledem k bázím $B = (x^3, x^2, x, 1)$ a $C = (x^3 - 1, x^2 + 2x + 3, x + 1, 1)$

[Sloupce matice jsou souřadnice obrazů prvků B vzhledem k C. Těmito obrazy jsou polynomy $3x^2, 2x, 1, 0$. $Coord_C(3x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Coord_C(2x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Coord_C(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Coord_C(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Matice je tedy $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5 Ověřte linearitu zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, $\mathbf{A}(p(x)) = p(3x - 1)$ a najděte jeho matici vzhledem k bázi $(x^2, x, 1)$.

Další úlohy na lineární zobrazení třeba zde