Lineární algebra, šesté cvičení

Karel Pospíšil

1 Lineární zobrazení

1.1 Najděte jádro, obraz, hodnost a defekt lineárního zobrazení .

$\mathbf{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\a-b\end{pmatrix}$

[Možný postup pro výpočet vycházející přímo z definice jádra je vyřešit soustavu $\begin{pmatrix}a+c\\a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, pak $ker(A)=span(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}),\ def(A)=1,\ im(a)=\mathbb{R}^2,\ rank(A)=2$]

$\mathbf{A}:\mathbb{R}^{\le 2}[x]\to\mathbb{R}^{\le 2}[x] \quad , \quad \mathbf{A}(ax^2+bx+c)=(a+b+c)x^2+(a+3b)x+(b-c)$

ZKUSÍM POSTUP PŘES MATICI: $A(x^2)=x^2+x,\ A(x)=x^2+3x+1,\ A(1)=x^2-1$

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc|}1&1&1\\1&3&0\\0&1&-1\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\R_2-R_1\\R_3\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|}1&1&1\\0&2&-1\\0&0&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\R_2\\2R_3-R_2\end{array}\to$

$\to\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to \underline{KER(A)=\{0\}} \to \underline{DIM(KER(A))=0}$

$DIM(\mathbb{R}^{\le 2}[x]) = DIM(IM(A)) + DIM(KER(A)) \to 3 = RANK(A) + DEF(A) \to$

$3 = 3 + 0$

$\to \underline{IM(A)=\mathbb{R}^{\le 2}[x]},\quad \underline{RANK(A)=3}$

$$\mathbf{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$$

[Vyrobíme matici zobrazeni vzhledem ke K_3 . Její sloupce jsou souřadnice obrazů prvků K_3 vzhledem ke K_3, tedy přímo obrazy prvků K_3 , což pro $\vec{e}_1$ je vidět ze zadání, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \vec{e}_1$, tedy $A(\vec{e}_2) = A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - A(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, tedy $A(\vec{e}_3) = A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$. Matice je tedy $\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\2 & -2 & 2\\4 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

Jádro je řešení homogenní soustavy dané touto maticí, ~~které je jediné, triviální, tedy~~ ~~$ker(A) = [\vec{o}]$, $def(A) = 0$, $im(a) = \mathbb{R}^3$, $rank(A) = 3$.]~~

$$\sim \begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -1 & 2\\0 & 1 & -2\end{pmatrix} & \begin{array}{l}R_2/2\\R_1\\R_3-2R_2\end{array}\end{array} \sim \begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\R_3+R_2\end{array}\end{array} \to$$

$$\to KER(A) = SPAN\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right),\ DEF(A) = 1,\ RANK(A) = 2,\ IM(A) = SPAN\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$K_4 = (x^3, x^2, x, 1)$

MATICE: $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$der = \left(coord_{K_4}(3x^2), coord_{K_4}(2x), coord_{K_4}(1), coord_{K_4}(0) \right)$$

$$der = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = coord_{K_4}(P(x)), \ t \in \mathbb{R}$$

$P(x) \in KER(der)$

$\to \underline{KER(der) = \{t ; t \in \mathbb{R}\}} \to \underline{DEF(der) = 1}$

$$DIM(\mathbb{R}^{\leq 3}[x]) = RANK(der) + DEF(der) \to \underline{RANK(der) = 3}$$

$$4 = 3 + 1$$

$\underline{IM(der) = \mathbb{R}^{\leq 2}[x]}$

$$der \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix} = coord_{K_4}(P(x)), \ P(x) \in IM(der) \nearrow$$

1.2 Ukažte, že pro libovolnou regulární matici $\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ a libovolnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ platí rovnosti: $def(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = def(\mathbf{A})$ a $rank(\mathbf{MA}) = rank(\mathbf{A})$.

Návod: nejprve dokažte, že $ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = ker(\mathbf{A})$. Pak použijte definici defektu a větu o dimensi jádra a obrazu.

$$\left.\begin{matrix} M : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r \\ A : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r \end{matrix}\right\} \to M \cdot A : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$$

$$(M \cdot A)\,\bar{x} = \bar{o}$$

$$\underbrace{\underbrace{(r{,}r \cdot r{,}s)}_{r{,}s} \cdot s{,}1}_{r{,}1} = r{,}1$$

JÁDRO M.A JE ŘEŠENÍ ROVNICE

$$(M \cdot A)\bar{x} = \bar{o}$$

$$M \cdot (A \cdot \bar{x}) = \bar{o}$$ ASOCIATIVITA NÁSOBENÍ MATIC

$$A \cdot \bar{x} = \bar{o}$$ M JE REGULÁRNÍ

<u>JÁDRO MA JE JÁDRO A</u>

$\downarrow$

<u>$DEF(MA) = DEF(A)$</u>

$\downarrow$

<u>$RANK(MA) = RANK(A)$</u>

$$DIM\,\mathbb{F}^s = DEF(MA) + RANK(MA)$$

$$DIM\,\mathbb{F}^s = DEF(A) + RANK(A)$$

$$0 = RANK(MA) - RANK(A) \to$$

$$K_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

2 Matice vzhledem k bázi

2.1 Spočtěte matice rotace, změny měřítka, projekce na osy a zkosení vzhledem k bázi $B = (\vec{e}_2, \vec{e}_1)$. Kreslete obrázky.

MATICE ROTACE VZHLEDEM K K_2 $\quad R_\alpha = \left(\mathrm{coord}_{K_2}(R_\alpha(\bar{e}_1)), \mathrm{coord}_{K_2}(R_\alpha(\bar{e}_2))\right) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

SLOUPCE JSOU SOUŘADNICE OBRAZŮ PRVKŮ K_2 VZHLEDEM K K_2,

$K_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, TEDY MATICE ROTACE VZHLEDEM K B:

$$\left(\mathrm{coord}_B(R_\alpha(\bar{e}_2)), \mathrm{coord}_B(R_\alpha(\bar{e}_1))\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}}}$$

MATICE ZMĚNY MĚŘÍTKA

$$M_{(a,b)} = \left(\mathrm{coord}_B(M_{(a,b)}(\bar{e}_2)), \mathrm{coord}_B(M_{(a,b)}(\bar{e}_1))\right) = \left(\mathrm{coord}_B\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}, \mathrm{coord}_B\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}}}$$

2.2 Najděte matici lineárního zobrazení $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$ vzhledem k bázi $(x^3, x^2, x, 1)$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}},$$ VIZ. 1.1

2.3 Najděte matici lineárního zobrazení $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$ vzhledem k bázi $(1, x, x^2, x^3)$ $= B$

$$der = \left(coord_B(0), coord_B(1), coord_B(2x), coord_B(3x^2) \right) = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2.4 Najděte matici lineárního zobrazení $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$ vzhledem k bázím $B = (x^3, x^2, x, 1)$ a $C = (x^3 - 1, x^2 + 2x + 3, x + 1, 1)$

[Sloupce matice jsou souřadnice obrazů prvků B vzhledem k C. Těmito obrazy jsou polynomy $3x^2, 2x, 1, 0$. $Coord_C(3x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Coord_C(2x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Coord_C(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Coord_C(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Matice je tedy $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$].

0 3 -6

$coord_C(3x^2)$: $3x^2 = \alpha(x^3-1) + \beta(x^2+2x+3) + \gamma(x+1) + \delta(1)$

$\underline{\alpha = 0}$ $\underline{\beta = 3}$ $0 = 3 \cdot 2 + \gamma \to \underline{\gamma = -6}$ $0 = 9 - 6 + \delta \to \underline{\delta = -3}$

$coord_C(2x), coord_C(1), coord_C(0)$ .... STEJNÝ POSTUP

2.5 Ověřte linearitu zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, $\mathbf{A}(p(x)) = p(3x-1)$ a najděte jeho matici vzhledem k bázi $(x^2, x, 1)$. $= K_3$

$$A(ax^2+bx+c) = a(3x-1)^2 + b(3x-1) + c$$

$$A(k(ax^2+bx+c)) = A((ka)x^2+(kb)x+(kc)) = (ka)(3x-1)^2+(kb)(3x-1)+(kc) =$$
$$= k(a(3x-1)^2+b(3x-1)+c) = k(ax^2+bx+c)$$

$$A(ax^2+bx+c)+A(a'x^2+b'x+c') = A((a+a')x^2+(b+b')x+(c+c')) =$$
$$= (a+a')(3x-1)^2+(b+b')(3x-1)+(c+c') = a(3x-1)^2+b(3x-1)+c+$$
$$+a'(3x-1)^2+b'(3x-1)+c' = A(ax^2+bx+c)+A(a'x^2+b'x+c')$$

Další úlohy na lineární zobrazení třeba zde

A JE LINEÁRNÍ

MATICE:

$$A = (\mathrm{coord}_{K_3}(A(x^2)), \mathrm{coord}_{K_3}(A(x)), \mathrm{coord}_{K_3}(A(1))) =$$
$$= (\mathrm{coord}_{K_3}\underbrace{(3x-1)^2}_{9x^2-6x+1}, \mathrm{coord}_{K_3}(3x-1), \mathrm{coord}_{K_3}(1)) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$