Lineární algebra, sedmé cvičení

Karel Pospíšil

1 Matice transformace souřanic

1.1 V $\mathbb{R}^2$ spočtěte následující úlohy.

Je dána báze $B = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$.

Bez využití matice transformace souřadnic najděte $coord_{K_2}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $coord_B\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

[$coord_{K_2}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $coord_B\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.]

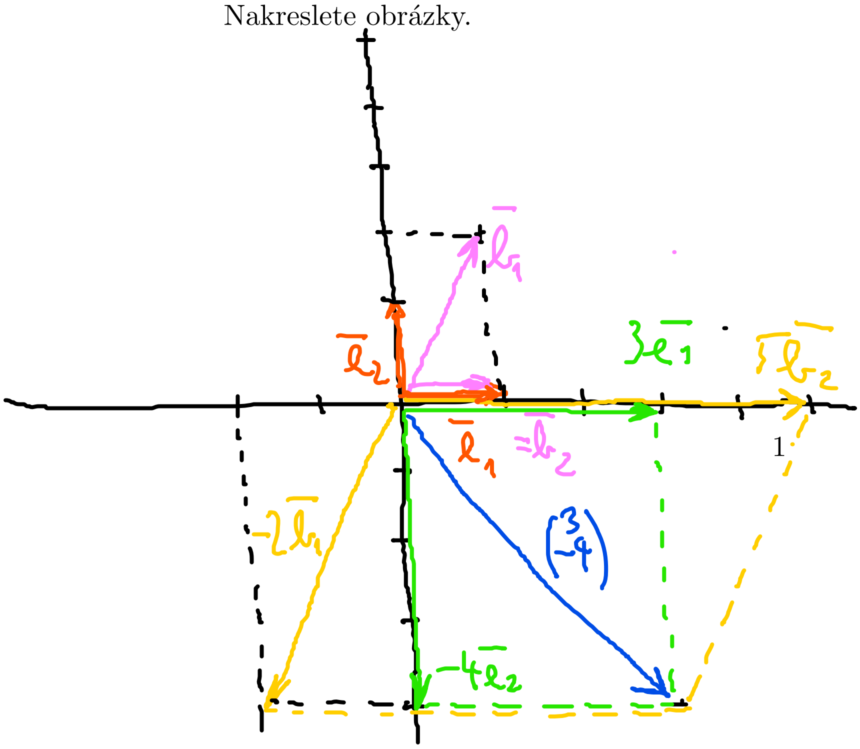
$$\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{coord_B\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{coord_{K_2}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}}$$

$$K_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Nakreslete obrázky.



Najděte $T_{B\to K_2}$.
[Jedná se vlastně o matici identického zobrazení vzhledem k bázím B a K_2. Její sloupce jsou souřadnice obrazů prvků B vzhledem ke K_2, tedy přímo prvky B. Tedy matice je $\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$.]

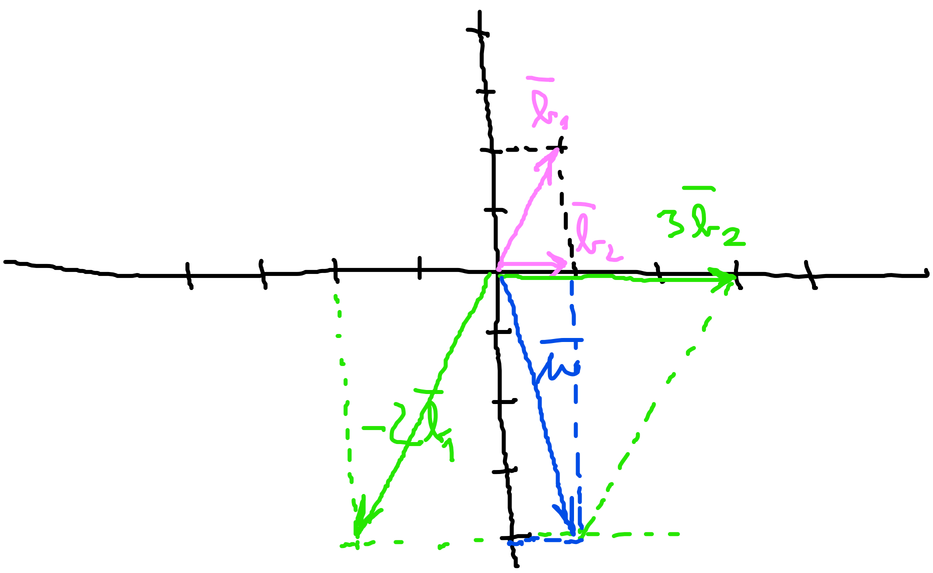
$B=\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, $K_2=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $id:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, identita, $id(\bar{u})=\bar{u}$

$$T_{B\to K_2}=\left(coord_{K_2}\left(id\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right), coord_{K_2}\left(id\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right)=$$

$$=\left(coord_{K_2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, coord_{K_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

Nakreslete vektor $\vec{u}$ pro který platí $coord_B(\vec{u})=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

$$\bar{u}=-2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$



Jakou rovnost musí splňovat matice $T_{K_2\to B}$? Spočtěte ji a rovnost ověřte.
[$T_{B\to K_2}\cdot T_{K_2\to B}\cdot = T_{K_2\to B}\cdot T_{B\to K_2} = E_2$. Jedná se vlastně o matici identického zobrazení vzhledem k bázím K_2 a B. Její sloupce jsou souřadnice obrazů prvků K_2 vzhledem k B, tedy přímo souřadnice prvků K_2 vzhledem k B. $Coord_B(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $coord_B(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Tedy matice je $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Rovnost platí.]

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad K_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\underline{T_{K_2\to B}} = \left(coord_B\left(id\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), coord_B\left(id\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= \overline{T_{K_2\to B}} = \left(coord_B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, coord_B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}"] & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_2 \arrow[r, "T_{K_2\to B}"] & \mathbb{R}_2 \\
\mathbb{R}_2 \arrow[u, "coord_{K_2}"] \arrow[r, "id"'] & \mathbb{R}_2 \arrow[u, "coord_B"']
\end{tikzcd}$$

Je dána matice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (změna měřítka vzhledem k bázím K_2, K_2).
Spočtěte součin $T_{K_2 \to B} \cdot M_{3,2} \cdot T_{B \to K_2}$
Promyslete význam součinu $T_{K_2 \to B} \cdot M_{3,2} \cdot T_{B \to K_2} \cdot coord_B(\vec{u})$
Nakreslete obrázek.

$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, coord_B\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{T_{K_2 \to B} \cdot \underbrace{M_{3,2} \cdot \underbrace{T_{B \to K_2} \cdot coord_B(\bar{u})}_{coord_{K_2}(\bar{u})}}_{coord_{K_2}(M_{3,2}(\bar{u}))}}_{coord_B(M_{3,2}(\bar{u}))} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

MATICE $M_{3,2}$ VZHLEDEM K B

$$\begin{tikzcd}
coord_B(\bar{u}) \arrow[rrr, mapsto] & & & coord_B(M_{3,2}\bar{u}) \\
 & \mathbb{R}_2 \arrow[r, "T_{K_2 \to B} M_{3,2} T_{B \to K_2}"] & \mathbb{R}_2 & \\
 & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "coord_B"] \arrow[r, "M_{3,2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "coord_B"'] & \\
\bar{u} \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & M_{3,2}\bar{u} \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

1.2 V $\mathbb{R}^{\leq 2}$ spočtěte následující úlohy.

Jsou dány báze (ověřte) $B = (x^2, x, 1)$, $C = ((x-2)^2, x-2, 1)$.
Bez využití matice transformace souřadnic najděte $coord_C(3x^2 - x + 2)$, $coord_B(3x^2 - x + 2)$.
Najděte matici $T_{C\to B}$.
Jakou rovnost musí splňovat matice $T_{B\to C}$? Spočtěte ji a rovnost ověřte.
Spočtěte součin $T_{B\to C} \cdot coord_B(ax^2 + bx + c)$
Co tento výpočet říká o rozvoji polynomu maximálně druhého stupně se středem v bodě 2?

$$\underline{\underline{coord_B(3x^2-x+2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$3x^2-x+2 = 3(x^2-4x+4)+11(x-2)+12(1)$$

$$\underline{\underline{coord_B(3x^2-x+2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \arrow[rrr, mapsto] & & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T_{B\to C}"] & \mathbb{R}^3 & \\
& \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \arrow[u, "coord_B"] \arrow[r, "id"] & \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \arrow[u, "coord_C"] & \\
x^2 \; x \; 1 \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & x^2 \; x \; 1 \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$1(x^2-4x+4)+4(x-2)+18(1)$$

$$0 \quad -''- \qquad 1 -''- \qquad 2 -''-$$

$$0 \quad -''- \qquad 0 -''- \qquad 1 -''-$$

ROVNOST PLATÍ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \arrow[rrr, mapsto] & & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T_{C\to B}"] & \mathbb{R}^3 & \\
& \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \arrow[u, "coord_C"] \arrow[r, "id"] & \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \arrow[u, "coord_B"] & \\
x^2-4x+4 \;\; x-2 \;\; 1 \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & x^2-4x+4 \;\; x-2 \;\; 1 \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$T_{B\to C} \cdot coord_B(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 4a+b \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} =$$

$$= coord_C(ax^2+bx+c), \text{ TAKŽE } ax^2+bx+c = a(x-2)^2+(4a+b)(x-2)+(4a+2b+c)(1)$$

$$T_2(x) = \frac{4a+2b+c}{0!}(x-2)^0 + \frac{4a+b}{1!}(x-2)^1 + \frac{2a}{2!}(x-2)^2$$