Lineární algebra, osmé cvičení

Karel Pospíšil

1 Soustavy rovnic

1.1 Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavy.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

[Nejdříve upravíme na horní blokový tvar $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $rank(A) = 2 = rank(\bar{A})$, takže má řešení, která lze napsat ve tvaru jakékoli řešení nehomogenní soustavy plus všechna řešení přidružené soustavy homogenní, která tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož dimenze je počet neznámých minus rank(A), tj. jedna a jeho báze je jednoprvková množina obsahující jakékoliv nenulové (nezávislé) řešení přidružené soustavy homogenní, takže všechna řešení lze napsat např. takto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + span\{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.] ,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

[Nejdříve upravíme na horní blokový tvar $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \end{array}\right)$, $rank(A) = 3 = rank(\bar{A})$, takže má řešení, která lze napsat ve tvaru jakékoli řešení nehomogenní soustavy plus všechna řešení přidružené soustavy homogenní, která tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož dimenze je počet neznámých minus rank(A), tj. 0, jeho báze je prázdná množina a který obsahuje pouze nulový prvek , takže vlastně existuje jediné řešení $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{19}{10} \end{pmatrix}$.] ,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

[Nejdříve upravíme na horní blokový tvar $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$, $rank(A) = 2 \neq 3 = rank(\bar{A})$, takže dle Frobeniovy věty nemá řešení.] ,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

[$Rank(A) = 1 = rank(\bar{A})$, takže má řešení, která lze napsat ve tvaru jakékoli řešení nehomogenní soustavy plus všechna řešení přidružené soustavy homogenní, která tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož dimenze je počet neznámých minus rank(A), tj. čtyři a jeho báze je čtyřprvková množina obsahující jakákoliv čtyři nezávislá řešení přidružené soustavy homogenní, takže všechna řešení lze napsat např. takto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.] ,

1.2 Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavy.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

1.3 Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavy, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2a & 6 \end{array}\right) , \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2a & 3a \end{array}\right)$$

1.4 K danému řešení najděte nějakou soustavu .

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + span(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix})$$

$$[\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \end{array}\right)],$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + span(\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix})$$

$$[\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)].$$

2 Inverzní matice

2.1 Nad $\mathbb{R}$ najděte, pokud existuje, inverzní matici k A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

[Řešení: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$,
takže $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Podrobnější postup zde.] ,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $[A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}]$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $[A^{-1} = \frac{1}{2a+1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, pro $a \neq -\frac{1}{2}]$.

2.2 Nad $\mathbb{C}$ najděte, pokud existuje, inverzní matici k A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+j \\ 2j & -1 \end{pmatrix}$ $[A^{-1} = \frac{1}{1-2j} \begin{pmatrix} -1 & -1-j \\ -2j & 1 \end{pmatrix}]$.

3 Maticové rovnice

4 Nad $\mathbb{R}$ řešte maticové rovnice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{E}$$