Lineární algebra, osmé cvičení

Karel Pospíšil

1 Soustavy rovnic

1.1 Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavy.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

[Nejdříve upravíme na horní blokový tvar $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $rank(A) = 2 = rank(\bar{A})$, takže má řešení, která lze napsat ve tvaru jakékoli řešení nehomogenní soustavy plus všechna řešení přidružené soustavy homogenní, která tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož dimenze je počet neznámých minus rank(A), tj. jedna a jeho báze je jednoprvková množina obsahující jakékoliv nenulové (nezávislé) řešení přidružené soustavy homogenní, takže všechna řešení lze napsat např. takto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} +$ $span\{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.] ,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

[Nejdříve upravíme na horní blokový tvar $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \end{array}\right)$, $rank(A) = 3 = rank(\bar{A})$, takže má řešení, která lze napsat ve tvaru jakékoli řešení nehomogenní soustavy plus všechna řešení přidružené soustavy homogenní, která tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož dimenze je počet neznámých minus rank(A), tj. 0, jeho báze je prázdná množina a který obsahuje pouze nulový prvek , takže vlastně existuje jediné řešení $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{19}{10} \end{pmatrix}$.] ,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

[Nejdříve upravíme na horní blokový tvar $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$, $rank(A) = 2 \neq 3 = rank(\bar{A})$, takže dle Frobeniovy věty nemá řešení.] ,

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$

[$Rank(A) = 1 = rank(\bar{A})$, takže má řešení, která lze napsat ve tvaru jakékoli řešení nehomogenní soustavy plus všechna řešení přidružené soustavy homogenní, která tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož dimenze je počet neznámých minus rank(A), tj. čtyři a jeho báze je čtyřprvková množina obsahující jakákoliv čtyři nezávislá řešení přidružené soustavy homogenní, takže všechna řešení lze napsat např. takto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + span\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.\ ]\ ,$$

$x_1 + x_2 + 0x_3 - 2x_4 + x_5 = 3$ RANK(A) = RANK($\bar{A}$) = 1

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$x_1 + 1 = 0$ $x_1 = 0$ $x_1 - 2 = 0$ $x_1 + 1 = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\-1&2&3\\3&4&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\0&4&6\\0&-2&-7\end{array}\right) \begin{matrix}R_2+R_1\\R_3-3R_1\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\0&2&3\\0&0&-8\end{array}\right) 2R_3+R_2$$

$\mathrm{RANK}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{RANK}(\bar{A})$

$\downarrow$ FROBENIOVA VĚTA

NŘ

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{SPAN}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

1.2 Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavy.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\-1&2&3\\3&4&2\end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\3&4&2\end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\3&6&9\end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&-2&0&3\\0&1&0&-2&0&3\end{array}\right).$$

1.3 Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavy, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr .

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a&1&2&3\\1&1&2a&6\end{array}\right) , \left(\begin{array}{ccc|c}a&1&2&3\\1&1&2a&3a\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a&1&2&3\\0&a-1&2a^2-2&6a-3\end{array}\right) aR_2-R_1$$

1) $a \neq 1$

$$\begin{pmatrix}\frac{-3}{a-1}\\ \frac{6a-3}{a-1}\\ 0\end{pmatrix} + \mathrm{SPAN}\left(\begin{pmatrix}2\\-2a-2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$ax + \frac{6a-3}{a-1} = 3 \qquad x = \frac{-6a+3+3a-3}{(a-1)a}$$

$$ax - 2a - 2 + 2 = 0 \qquad x = 2$$

$$(a-1)y + 2a^2 - 2 = 0$$

$$y = \frac{-2(a^2-1)}{a-1} = \frac{-2(a+1)}{1}$$

2) $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

$\mathrm{RANK}(A) = 1 \neq 2 = \mathrm{RANK}(\bar{A}) \xrightarrow{F.V.}$ NŘ

1.4 K danému řešení najděte nějakou soustavu .

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + span(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix})$$

$[\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \end{array}\right)]$,

$2 - RANK(A) = 1 \rightarrow RANK(A) = 1$

H.S.: $ax + by = 0$

$a(-2) + b3 = 0$

$3x + 2y = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\underline{\underline{\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \end{array}\right)}}$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + span(\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix})$$

$[\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)]$.

1) ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ SOUSTAVY: $SPAN(\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix})$

PROTO PLATÍ $A_{24} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 0\\3 & 1\\1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \left[A_{24}\begin{pmatrix}-2 & 0\\3 & 1\\1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^T \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} A_{24}^T = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -1\\2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

VOLÍM

DOPOČÍTÁVÁM

TAKŽE $\underline{A_{24} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\-2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

2) ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY: $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

PROTO PLATÍ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\-2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \bar{b} \rightarrow \bar{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

3) HLEDANÁ SOUSTAVA: $\underline{\underline{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}}$

2 Inverzní matice

2.1 Nad $\mathbb{R}$ najděte, pokud existuje, inverzní matici k A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

[Řešení: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$,
takže $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Podrobnější postup zde.] ,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $[A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}]$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{3R_3-2R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 8 & 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & 0 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} 8R_1+R_3 \\ 4R_2-R_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & 0 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \tfrac{2}{3}R_2+R_1 \qquad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$a \neq -\frac{1}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $[A^{-1} = \frac{1}{2a+1}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}]$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & -1-2a & -2 & 1 \end{array}\right) R_2-2R_1 \underset{aR_2+(1+2a)R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1+2a & 0 & 1 & a \\ 0 & -1-2a & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2a+1} & \frac{a}{2a+1} \\ 0 & 1 & \frac{+2}{2a+1} & \frac{-1}{2a+1} \end{array}\right)$$

$1+2a-2a$

$A^{-1} = \frac{1}{2a+1}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .... $a \neq -\frac{1}{2}$

A^{-1} NEEX .... $a = -\frac{1}{2}$

2.2 Nad $\mathbb{C}$ najděte, pokud existuje, inverzní matici k A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+j \\ 2j & -1 \end{pmatrix}$ $[A^{-1} = \frac{1}{1-2j} \begin{pmatrix} -1 & -1-j \\ -2j & 1 \end{pmatrix}]$.

$(1+j)2j = 2j-2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1+j & 1 & 0 \\ 2j & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1+j & 1 & 0 \\ 0 & 1-2j & -2j & 1 \end{array}\right)_{R_2 - 2jR_1} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1-2j & 0 & -1 & -1-j \\ 0 & 1-2j & -2j & 1 \end{array}\right)^{(1-2j)R_1 - (1+j)R_2}$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{1-2j}\begin{pmatrix} -1 & -1-j \\ -2j & 1 \end{pmatrix}}}$$

$(1-2j)-(1+j)(-2j) = 1-2j+2j-2 = -1$

3 Maticové rovnice

4 Nad $\mathbb{R}$ řešte maticové rovnice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

JAKO VÝPOČET INVERZNÍ MATICE, ALE NAPRAVO NENÍ E_2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \end{array}\right)_{R_2 - 2R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 \end{array}\right)^{3R_1 + R_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 \end{array}\right) \to \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

PŘEVEDU NA SOUSTAVU 4 ROVNIC O 4 NEZNÁMÝCH. SOUSTAVA JE HOMOGENNÍ → ŘEŠENÍ TVOŘÍ PODPROSTOR. JEHO BÁZE: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, DIMENZE JE 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & m \\ y & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & m \\ y & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

VYNÁSOBÍM VPRAVO I VLEVO

$$\begin{pmatrix} x & m \\ 2x-y & 2m-n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2m & -m \\ y+2n & -n \end{pmatrix}$$

POROVNÁM MATICE

$m = 0$

$m = 0$

$2x-y = y+2n \to n = x-y$

$m = 0$

VOLÍM $x=r$, $y=s$, POTOM $n = r-s$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & r-s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

TAKŽE

$$\underline{\underline{X = \mathrm{SPAN}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{E}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right) X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) R_2 - R_1 \rightarrow \underline{\underline{X \text{ NEEX}}}$$