# Lineární algebra, deváté cvičení

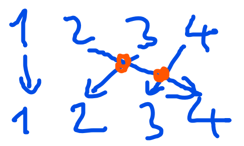
Karel Pospíšil

## 1 Determinanty

### 1.1 Spočtěte daná složení daných permutací. Určete znaménka. Použijte různé typy zápisu.

$\sigma \cdot \omega$, $\omega \cdot \omega^{-1}$, $\omega \cdot \sigma \cdot \omega$
$\sigma : 1 \mapsto 4, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 3$
$\omega : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 4$

$\sigma \circ \omega$: $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 3$



POČET INVERZÍ = POČET PRŮSEČÍKŮ = 2

NEBO

POČET SITUACÍ „MENŠÍ PŘED VĚTŠÍM" = 2

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 3 |

ZNAMÉNKO $(-1)^{\text{POČET INVERZÍ}} = (-1)^2 \ldots$ KLADNÉ

### 1.2 Spočtěte podle definice i dalšími metodami determinant matice.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $[1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2]$ ,

TVOŘÍM SOUČINY Z PRVKŮ MATICE, V KAŽDÉM SOUČINU JE Z KAŽDÉHO ŘÁDKU I SLOUPCE PRÁVĚ JEDEN PRVEK, DLE POČTU INVERZÍ PŘIDÁM ZNAMÉNKO ($(-1)^{\text{POČET INVERZÍ}}$) A SEČTU.

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^0 \cdot 1 \cdot 4 + (-1)^1 \cdot 2 \cdot 3 = -2$

ŘÁDKY / SLOUPCE

| 1 | 2 |
|---|---|
| 1 | 2 |

0 INVERZÍ

| 1 | 2 |
|---|---|
| 2 | 1 |

1 INVERZE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ [1\cdot2\cdot2+2\cdot3\cdot3+(-1)\cdot4\cdot3-(3\cdot2\cdot3+4\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot2)=-16]\ ,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \overset{1\,2\,3}{(-1)^{0}\,1\cdot2\cdot2} + \overset{2\,3\,1}{(-1)^{2}\,2\cdot3\cdot3} + \overset{3\,1\,2}{(-1)^{2}\,3\cdot(-1)\cdot4} +$$

$$+ \underset{3\,2\,1}{(-1)^{3}\cdot3\cdot2\cdot3} + \underset{1\,3\,2}{(-1)^{1}\,1\cdot3\cdot4} + \underset{2\,1\,3}{(-1)^{1}\cdot2\cdot(-1)\cdot2} =$$

$$= 4+18-12-(18+12-4) = -\underline{\underline{16}}$$

DO TŘETÍHO ŘÁDU SI LZE SCHÉMA PAMATOVAT – SARUSSOVO PRAVIDLO

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

[Rozvoj dle prvního řádku: $-2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2(-6-6-9+4) + 3(-6-4+4+4) = 34-30 = 4.$

GEM: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$]

ROZVOJ PODLE $i$-TÉHO ŘÁDKU $D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} S_{ik}$

$n=4$ (ŘÁD MATICE), $S_{ik}$ – SUBDETERMINANT, VZNIKNE VYNECHÁNÍM $i$-TÉHO ŘÁDKU A $k$-TÉHO SLOUPCE V $D$.

$D_{ik}$ – DOPLNĚK K $i$-TÉMU ŘÁDKU A $k$-TÉMU SLOUPCI.

ROZVOJ PODLE 1. ŘÁDKU

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{11} D_{11} + a_{12} D_{12} + a_{13} D_{23} + a_{14} D_{14} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} S_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} S_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} S_{13} + a_{14}(-1)^{1+4} S_{14} =$$

$$= 0\cdot S_{11} - 2\cdot S_{12} + 3\cdot S_{13} - 0\cdot S_{14} = -2\cdot S_{12} + 3 S_{13} \ldots$$

... DÁLE VIZ VÝŠE

ROZVOJ FUNGUJE PODLE LIBOVOLNÉHO ŘÁDKU ČI SLOUPCE.

VYBRAL JSEM PRVNÍ ŘÁDEK, JE V NĚM NEJVÍC NUL.

1.3 S využitím determinantů spočtěte rovnici přímky v $\mathbb{R}^2$ procházející body $A, B$.

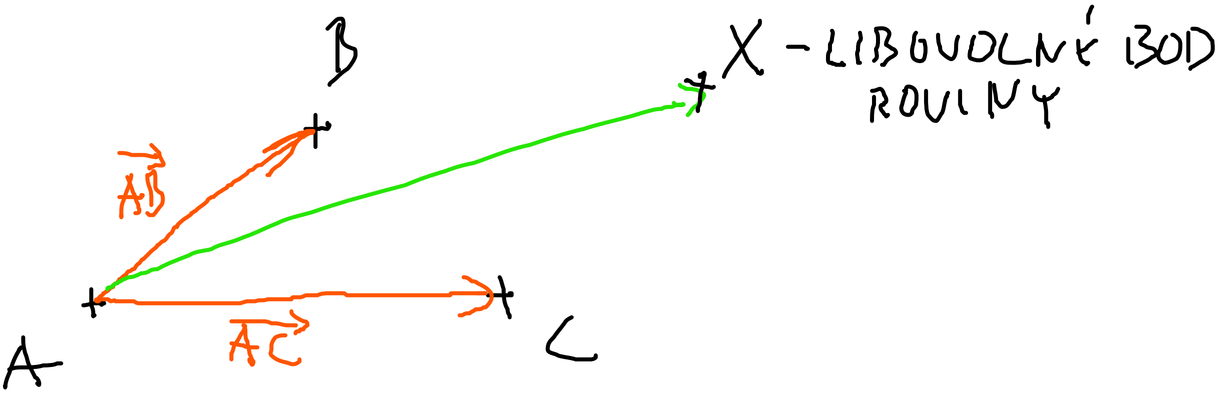
$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

[Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AX}$ musí být lineárně závislé, tj. rovnice se dá napsat ve tvaru $|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AX}| = 0$, po úpravě $\begin{vmatrix} -1 & x+1 \\ 2 & y-1 \end{vmatrix} = 0$, $-2x - y - 1 = 0$ ]

1.4 S využitím determinantů spočtěte rovnici roviny v $\mathbb{R}^3$ procházející body $A, B, C$.

$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[$y - 2z - 1 = 0$]




$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AX}$ MUSÍ LEŽET V ROVINĚ → JSOU LZ

TAKŽE SPLŇUJÍ ROVNICI $|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AX}| = 0$

... ATD.