① ŘEŠTE OBECNĚ: a) ELIMINACÍ b) MATICOVĚ
c) ŘEŠTE CAUCHYOVU ÚLOHU.

$$y_1' = 4y_1 - y_2 \qquad y_1(0) = 2$$
$$y_2' = 5y_1 - 2y_2 \qquad y_2(0) = 6$$

a) ELIMINACE: Z PRVNÍ ROVNICE VYJÁDŘÍM y_2.
DO DRUHÉ DOSADÍM.

$y_2 = 4y_1 - y_1'$, $(4y_1 - y_1')' = 5y_1 - 2(4y_1 - y_1')$,

$4y_1' - y_1'' = 5y_1 - 8y_1 + 2y_1'$,

H.R. $y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 0$ JEDNA ROVNICE, JEDNA NEZNÁMÁ – UMÍM!

CH.R. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

$FS = \{e^{-x}, e^{3x}\}$, $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$

$y_2 = 4y_1 - y_1' = 4C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{3x} + C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{3x}$,

$y_2 = 5C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ 5e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}$$

b) MATICOVÝ PŘÍSTUP

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, HLEDÁM VLASTNÍ ČÍSLA A PODPROSTORY

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda)+5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

ŘEŠENÍ:

$\lambda = -1 : \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, VL. PODPR. : SPAN $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-x}$

$\lambda = 3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$, VL. PODPR. : SPAN $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$

FUNDAMENTÁLNÍ MATICE: $\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ 5e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ 5e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) CAUCHY

$$2 = c_1 + c_2$$
$$6 = 5c_1 + c_2$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_P = \begin{pmatrix} y_{1P} \\ y_{2P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ 5e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

② ŘEŠTE OBECNĚ:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -10y_1 + 6y_2$$

MATICOVÝ PŘÍSTUP

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$, HLEDÁM VLASTNÍ ČÍSLA A PODPROSTORY

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -10 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm j2}{2}$$

$\lambda = 3+j$ (DRUHÉ λ NETŘEBA, VYŠLO BY TO STEJNĚ)

$$\begin{pmatrix} -3-j & 1 \\ -10 & 3-j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3-j & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {\scriptstyle -10R_1 + (3+j)R_2}$$

VLASTNÍ PODPROSTOR: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3+j \end{pmatrix}$

ŘEŠENÍ: $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3+j \end{pmatrix} e^{(3+j)x} = \begin{pmatrix} e^{3x}(\cos x + j\sin x) \\ (3+j)e^{3x}(\cos x + j\sin x) \end{pmatrix}$

$$= e^{3x}\begin{pmatrix} \cos x + j\sin x \\ 3\cos x + 3j\sin x + j\cos x - \sin x \end{pmatrix}$$

DO BÁZE PROSTORU VŠECH ŘEŠENÍ DÁM REÁLNOU A IMAGINÁRNÍ ČÁST.

FUNDAMENTÁLNÍ MATICE JE TEDY:

$$FM = e^{3x}\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ 3\cos x - \sin x & 3\sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

VŠECHNA ŘEŠENÍ SOUSTAVY:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = FM \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(3) PŘEVEĎTE NA SOUSTAVU, NAPIŠTE MATICI.

$$y''' + y'' - y' + 3y = 0$$

PŘEJMENUJI $y = y_1$

$$y_1''' + y_1'' - y_1' + 3y_1 = 0$$

SUBSTITUCE $y_1' = y_2$

$$y_2'' + y_2' - y_2 + 3y_1 = 0$$

SUBSTITUCE $y_2' = y_3$

$$y_3' + y_3 - y_2 + 3y_1 = 0$$

ČERVENÉ ROVNICE TVOŘÍ SOUSTAVU

MATICE SOUSTAVY:

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}}$$