1. ŘEŠTE OBECNĚ:

$$x_1' = -3x_1 - 2x_2$$

$$x_2' = 2x_1 + x_2$$

$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, HLEDÁM VLASTNÍ ČÍSLA A PODPROSTORY

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0, \ \lambda = -1, \text{ 2-NÁS.}$$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, VLASTNÍ PODPROSTOR: SPAN $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ŘEŠENÍ TŘEBA: $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_2$ JE ŘEŠENÍ ROUNICE $\bar{v}_1 = (A - \lambda E)\bar{v}_2$

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, (TŘEBA)

FUNDAMENTÁLNÍ MATICE:

1. SLOUPEC (1. PRVEK BÁZE): $\bar{v}_1 e^{-t}$

2. SLOUPEC (2. PRVEK BÁZE): $(\bar{v}_2 + t\bar{v}_1)e^{-t}$

$$FM = \begin{pmatrix} -e^{-t} & \left(\frac{1}{2} - t\right)e^{-t} \\ e^{-t} & t\, e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = FM \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

2. ŘEŠTE OBECNĚ ODHADEM I VARIACÍ

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2 + 3x - 2$$
$$y_2' = y_1 - 2y_2 + 2x$$

MATICOVÝ TVAR

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x-2 \\ 2x \end{pmatrix}$$

HOMOGENNÍ SOUSTAVA

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda = \pm 1$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_1 = 3ae^{x} + be^{-x}$$
$$\tilde{y}_2 = ae^{x} + be^{-x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 3e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVA

VARIACE

$$\hat{y}_1 = 3a(x)e^{x} + b(x)e^{-x}, \quad \hat{y}_1' = 3a'(x)e^{x} + 3a(x)e^{x} + b'(x)e^{-x} - b(x)e^{-x}$$
$$\hat{y}_2 = a(x)e^{x} + b(x)e^{-x}, \quad \hat{y}_2' = a'(x)e^{x} + a(x)e^{x} + b'(x)e^{-x} - b(x)e^{-x}$$

DOSADÍM DO NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY

$$3a'(x)e^{x} + 3a(x)e^{x} + b'(x)e^{-x} - b(x)e^{-x} = 6a(x)e^{x} + 2b(x)e^{-x} - 3a(x)e^{x} - 3b(x)e^{-x} + 3x - 2$$

$$a'(x)e^{x} + a(x)e^{x} + b'(x)e^{-x} - b(x)e^{-x} = 3a(x)e^{x} + b(x)e^{-x} - 2a(x)e^{x} - 2b(x)e^{-x} + 2x$$

VŠECHNA $a(x)$ a $b(x)$ ZMIZÍ

$$3a'(x)e^{x} + b'(x)e^{-x} = 3x - 2$$
$$a'(x)e^{x} + b'(x)e^{-x} = 2x$$

A ŘEŠÍM SOUSTAVU S NEZNÁMÝMI $a'(x), b'(x)$

A MATICÍ $\left(\begin{array}{cc|c} 3e^x & e^{-x} & 3x-2 \\ e^x & e^{-x} & 2x \end{array}\right)$

CRAMEROVO PRAVIDLO

$$a'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3x-2 & e^{-x} \\ 2x & e^{-x} \end{vmatrix}}{D} = \frac{xe^{-x} - 2e^{-x}}{2}$$

$$b'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3e^x & 3x-2 \\ e^x & 2x \end{vmatrix}}{D} = \frac{3xe^x + 2e^x}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \frac{1}{2}x & v = e^{-x} \\ u' = \frac{1}{2} & v' = -e^{-x} \end{array}}$$

$$a(x) = \int \frac{1}{2}xe^{-x}\,dx - \int e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-x}$$

$$b(x) = \int \frac{3}{2}xe^{x}\,dx + \int e^{x}\,dx = \frac{3}{2}xe^{x} - \frac{3}{2}e^{x} + e^{x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \frac{3}{2}x & v = e^{x} \\ u' = \frac{3}{2} & v' = e^{x} \end{array}}$$

DOSADÍME DO

$$\hat{y}_1 = \frac{3}{2}\left(-xe^{-x} + e^{-x}\right)e^x + \left(\frac{3}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x\right)e^{-x} = 1$$

$$\hat{y}_2 = \left(-\frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right)e^x + \left(\frac{3}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x\right)e^{-x} = x$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}$$

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVA

ODHAD

$\hat{y}_1 = Ax + B$

$\hat{y}_2 = Cx + D$

SPECIFIKA PRO SOUSTAVY

DO OBOU NEZNÁMÝCH OBA TYPY ODHADU

JE-LI PŘESAH S EXPONENTEM S, PŘIDÁM I ODHADY SE VŠEMI MENŠÍMI EXPONENTY

$\hat{y}_1' = A$

$\hat{y}_2' = C$

DOSADÍM DO NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY

$A = 2(Ax+B) - 3(Cx+D) + 3x - 2$

$C = Ax + B - 2(Cx+D) + 2x$

$x^1$: $0 = 2A - 3C + 3$

$0 = A - 2C + 2 \;|\cdot(-2)$

$0 = C - 1$

$C = 1,\ A = 0$

$x^0$: $A = 2B - 3D - 2$

$C = B - 2D$

$2B - 3D = 2$

$B - 2D = 1 \;|\cdot(-2)$

$D = 0,\ B = 1$

$\hat{y}_1 = 1$

$\hat{y}_2 = x$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$$