$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\, y^{(0)} = f(x) \quad \text{LDR}$$

$$- \quad '' \quad - \quad = 0 \quad \text{HLDR}$$

---

y	$=\ \hat{y}$	$+\ \tilde{y}$
VŠECHNA ŘEŠENÍ LDR	JEDNO ŘEŠENÍ LDR	VŠECHNA ŘEŠENÍ HLDR
	PRO LDRKK A SPEC. $f(x)$ ODHADEM (POTŘEBUJI CH. R.)	PRO HLDRKK PŘES CH. R.
	PRO LDR VARIACÍ KONST. (POTŘEBUJI $\tilde{y}$)	PRO HLDR1Ř SEPARACÍ

HLDRKK

1. $y'' + y' - 2y = 0$

CH.R.: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \quad \lambda_{1,2} = -2, 1$

F.S. $= \{e^{-2t}, e^{t}\}$ $\quad y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}, t \in R$

$y(t) \to C_2 e^{t}$ PRO $t \to \infty$

λ - JEDNONÁSOBNÝ REÁLNÝ KOŘEN CH.R. $\to$

$\to$ VE F.S. SE OBJEVÍ $e^{\lambda t}$

---

2. $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$

CH.R.: $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = 0$

F.S. $= \{e^{3t}, te^{3t}, t^2 e^{3t}\}$

$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + C_3 t^2 e^{3t}, t \in R$

$y(t) \to C_3 t^2 e^{3t}$ PRO $t \to \infty$

λ - K-NÁSOBNÝ REÁLNÝ KOŘEN CH.R. $\to$ VE F.S. SE OBJEVÍ

$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda t}$

HORNER!

	1	−9	27	−27
3		3	−18	27
	1	−6	9	0
3		3	−9	
	1	−3	0	
3		3		
	1	0		

$\lambda_{1,2,3} = 3$

③ $y''' - y'' + 2y = 0$

CH.R.: $\lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0$

$(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$

$(\lambda+1)(\lambda-(1+j))(\lambda-(1-j)) = 0$

HORNER:

	1	-1	0	2
-1		-1	2	-2
	1	-2	2	0

KVADR. R.:

$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm j$

$\lambda_1 = -1$

F.S. $= \{e^{-t}, e^{t}\cos t, e^{t}\sin t\}$

$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}\cos t + C_3 e^{t}\sin t, \; t \in \mathbb{R}$

λ - JEDNONÁSOBNÁ KOMPLEXNĚ SDRUŽENÁ DVOJICE KOŘENŮ $a \pm jb$ →
→ VE F.S. SE OBJEVÍ $e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt$

DVOJICE ZA DVOJICI !

K-NÁSOBNOST SE PRO KOMPLEXNÍ KOŘENY ŘEŠÍ JAKO PRO REÁLNÉ !

4. $y'' + y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

Z 1. PLATÍ $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}, \; t \in \mathbb{R}$

PŘIDÁM $y'(t) = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

PO DOSAZENÍ P.P. ZÍSKÁM DVĚ ROVNICE A DVĚ NEZNÁMÉ C_1, C_2

$$1 = C_1 + C_2$$
$$1 = -2C_1 + C_2$$
$$C_1 = 0 \quad C_2 = 1$$

TEDY $y_p(t) = e^{t}, \; t \in \mathbb{R}$

METODA ODHADU PRO LDRKK SE SPEC. f(x)

JE-LI PRAVÁ STRANA QUAZIPOLYNOM

$$\boxed{e^{ax}\left(P_k(x)\cos bx + Q_l(x)\sin bx\right)}, \quad P_k(x), Q_l(x) \text{ - POLYNOMY STP. } k, l$$

LZE ODHADNOUT ŘEŠENÍ TAKTO:

$$x^s e^{ax}\left(R_m(x)\cos bx + S_m(x)\sin bx\right)$$

s - NÁSOBNOST $a+jb$ JAKO KOŘENE V CH. R.

$m = \max(k, l)$, $R_m(x), S_m(x)$ - POLYNOMY STP. m

ODHAD JE JASNÝ AŽ NA KOEFICIENTY $R_m(x), S_m(x)$

TY ZJISTÍM PROVEDENÍM ZKOUŠKY

(PRO (NE)HOMOGENNÍ ROVNICI).

---

5. $y'' + y' - 2y = e^{-2x} \stackrel{?}{=} e^{ax}\left(P_k(x)\cos bx + Q_l(x)\sin bx\right)$

Z 1. PLATÍ $\lambda_{1,2} = 1, -2$

ZKUSÍM $a = -2$ $b = 0$ $a+jb = -2$ $s = 1$

$P_k(x) = 1$ $Q_l(x) = 0$ $m = 0$

$$e^{-2x} \stackrel{?}{=} e^{-2x}\left(1 \cdot \cos 0x + 0 \cdot \sin 0x\right)$$

ANO - PRAVÁ STRANA JE QUAZIPOLYNOM!

TVAR ODHADU:

$$x^1 e^{-2x}\underbrace{\left(A\cos 0x + B\sin 0x\right)}_{\text{OBECNÉ POLYNOMY STUPNĚ } m=0}$$

TAKŽE ODHAD:

$\hat{y} = Axe^{-2x}$ | -2 KRÁT

$\hat{y}' = A(e^{-2x} - 2xe^{-2x})$ | 1 KRÁT

$\hat{y}'' = A(-2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x})$ | 1 KRÁT

ZKOUŠKA (DOSAZENÍ DO ROVNICE):

$$-A3e^{-2x} + 0xe^{-2x} = e^{-2x} \rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ: $\hat{y} = -\frac{1}{3}xe^{-2x}$

HOMOGENNÍ ŘEŠENÍ (Z 1.): $\tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

NEHOMOGENNÍ ŘEŠENÍ: $y = \tilde{y} + \hat{y}$, $x \in \mathbb{R}$