METODA PEVNÉHO BODU

ROVNICE : $\ln x + \sqrt{x} - 4 = 0$

KOŘEN : PŘIBLIŽNĚ 5

HLEDÁM MOŽNÉ PŘEVODY NA ROVNICI PEVNÉHO BODU $\varphi(x) = x$.

TESTUJI PODMÍNKU $|\varphi'(x)| \leq q < 1$.

1. $\varphi(x) = \ln x + \sqrt{x} - 4 + x$ (STANDART)

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1, \quad \varphi'(5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}} + 1 > 1$$

PODMÍNKA ASI NEPLATÍ

2. $\ln x + \sqrt{x} - 4 - x = -x, \quad x = x - \ln x - \sqrt{x} + 4$

$\varphi(x) = x - \ln x - \sqrt{x} + 4$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \varphi'(5) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2\sqrt{5}}, \quad 0 < \varphi'(5) < 1$$

PODMÍNKA ASI PLATÍ

3. $\ln x + \sqrt{x} - 4 = 0, \quad \ln x = 4 - \sqrt{x}, \quad x = e^{4-\sqrt{x}}$

$\varphi(x) = e^{4-\sqrt{x}}$

$$\varphi'(x) = -e^{4-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \varphi'(5) = -\underbrace{e^{4-\sqrt{5}}}_{>5} \cdot \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{5}}_{<5}} < -1$$

PODMÍNKA ASI NEPLATÍ

PŘÍSLUŠNÝ MAPLE SOUBOR: DRN05RES.MW

4. $\ln x + \sqrt{x} - 4 = 0, \; \sqrt{x} = 4 - \ln x, \; x = (4 - \ln x)^2$

$\varphi(x) = (4 - \ln x)^2$

$\varphi'(x) = -2(4 - \ln x)\frac{1}{x}, \; \varphi'(5) = \underbrace{-2(4 - \ln 5)\frac{1}{5}}_{\text{VIZ KALKUAČKA}} \doteq -0{,}96$

PODMÍNKA ASI TĚSNĚ PLATÍ

(POKUD BUDE KONVERGENCE, TAK POMALÁ)

5. $\ln x + \sqrt{x} - 4 = 0, \; \sqrt{x}\ln x + x - 4\sqrt{x} = 0,$

$x = (4 - \ln x)\sqrt{x}$

$\varphi(x) = (4 - \ln x)\sqrt{x}$

$\varphi'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{(4 - \ln x)}{2\sqrt{x}}, \; \varphi'(5) = \underbrace{-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4 - \ln 5}{2\sqrt{5}}}_{\text{VIZ KALKUAČKA}} \doteq 0$

PODMÍNKA ASI URČITĚ PLATÍ

(RYCHLÁ KONVERGENCE)

6. $\ln x + \sqrt{x} - 4 = 0, \; \ln x = 4 - \sqrt{x} \; /\cdot(4 + \sqrt{x}),$

$(4 + \sqrt{x})\ln x = 16 - x, \; x = 16 - (4 + \sqrt{x})\ln x$

$\varphi(x) = 16 - (4 + \sqrt{x})\ln x$

$\varphi'(x) = -\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{4 + \sqrt{x}}{x}, \; \varphi'(5) = -\frac{\overset{\doteq 1{,}6}{\ln 5}}{2\sqrt{5}} - \underset{>1}{\frac{4 + \sqrt{5}}{5}} < -1$

PODMÍNKA ASI NEPLATÍ

POZOR! NEPLATNOST PODMÍNKY NEMUSÍ ZNAMENAT NEKONVERGENCI. NĚKDY TO FUNGUJE I TAK.

RELAXACE

$\varphi(x) = x, \quad \lambda\varphi(x) = \lambda x, \quad \lambda\varphi(x) + x = \lambda x + x$

$x = \lambda\varphi(x) + x - \lambda x = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)x$

TAKŽE

$\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)x$

---

1) PRO $\varphi(x) = (4-\ln x)^2$

$\varphi_\lambda(x) = \lambda(4-\ln x)^2 + (1-\lambda)x$

HLEDÁM λ, PRO KTERÉ JE $\varphi_\lambda'(x)$ BLÍZKO 0

$\varphi_\lambda'(x) = -2\lambda(4-\ln x)\frac{1}{x} + (1-\lambda) = 0$

KOŘEN JE ASI 5, DOSADÍM

$-2\lambda(4-\ln 5)\frac{1}{5} + 1 - \lambda = 0$

VYJÁDŘÍM λ

$$\lambda = \frac{1}{2(4-\underbrace{\ln 5}_{\doteq 1{,}6})\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{4{,}8\cdot\frac{1}{5}+1} \doteq \frac{1}{2}$$

Z MAPLE VIDÍM, ŽE DOŠLO K VELKÉMU URYCHLENÍ KONVERGENCE.

2) PRO $\varphi(x) = \ln x + \sqrt{x} - 4 + x$ (STANDART)

$$\varphi_\lambda(x) = \lambda(\ln x + \sqrt{x} - 4 + x) + (1-\lambda)x = \lambda(\ln x + \sqrt{x} - 4) + x$$

HLEDÁM λ, PRO KTERÉ JE $\varphi_\lambda'(x)$ BLÍZKO 0

$$\varphi_\lambda'(x) = \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 1 = 0$$

KOŘEN JE ASI 5, DOSADÍM

$$\lambda\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) + 1 = 0$$

VYJÁDŘÍM λ

$$\lambda = -\frac{1}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)} =$$

$$= -\frac{10}{2+\sqrt{5}} \doteq -\frac{5}{2}$$

Z MAPLE VIDÍM, ŽE DOŠLO K ZÁCHRANĚ KONVERGENCE.