Postup pro řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Vezmeme rovnici s neznámou y ve tvaru

$y' + g(x)y = f(x)$

Řešení homogenní rovnice

Toto je její přidružená homogenní rovnice

$y' + g(x)y = 0$

Vyřešíme ji separací

$\frac{dy}{dx} = -g(x)y$

$\int \frac{dy}{y} = -\int g(x)dx$

$ln|y| = -G(x) + C$

$G(x)$ je funkce primitivní k funkci $g(x)$

$|y| = e^{-G(x)+C}$

$y_h = Ke^{-G(x)}$

Variace konstanty

Nyní vytvoříme tvar partikulárního (jednoho libovolného) řešení nehomogenní rovnice tak, ze ve tvaru pro všechna řešení homogenní rovnice nahradíme konstantu K funkcí K(x).

$y_p = K(x)e^{-G(x)}$

Výsledek dosadíme za y do nehomogenní rovnice. Získáme tím novou rovnici s novou neznámou funkcí K(x).

$(K(x)e^{-G(x)})' + g(x)K(x)e^{-G(x)} = f(x)$

Zderivujeme a upravíme

$K'(x)e^{-G(x)} + K(x)e^{-G(x)}(-G(x))' + g(x)K(x)e^{-G(x)} = f(x)$

$K'(x)e^{-G(x)} + K(x)e^{-G(x)}(-g(x)) + g(x)K(x)e^{-G(x)} = f(x)$

$K'(x)e^{-G(x)} = f(x)$

Získali jsme rovnici, která je sice stále diferenciální, ale neznámá funkce K(x) se v ní vyskytuje pouze ve své první derivaci.

Tuto rovnici řešíme tak, že vyjádříme $K'(x)$

$K'(x) = \frac{f(x)}{e^{-G(x)}}$

Zintegujeme, integrační konstantu netřeba přidávat, staci jedno $K(x)$ pro jedno y_p

$K(x) = \int \frac{f(x)}{e^{-G(x)}} dx$

Dosadíme do tvaru pro y_p

$y_p = \int \frac{f(x)}{e^{-G(x)}} dx \; e^{-G(x)}$

Obecné řešení

A napíšeme obecné řešení zadané (nehomogenní) rovnice ve tvaru

$y = y_p + y_h$

Tedy

$y = \int \frac{f(x)}{e^{-G(x)}} dx \; e^{-G(x)} + Ke^{-G(x)}$

Pokud umíme spočítat $G(x)$ a $\int \frac{f(x)}{e^{-G(x)}} dx$ máme vyhráno !

Podmínky uděláme podle funkcí $g(x)$ a $f(x)$