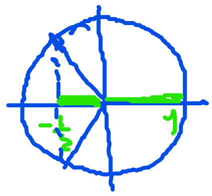
Matematická analýza 1, 1.paralelka - obory EEM a EK, desáté cvičení

Karel Pospíšil

1 Sčítání číselných řad

1.1 Sečtěte řadu.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi}{3}}{2^k}$ $[-\frac{2}{7}]$



$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \dots$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi}{3}}{2^k} = -\frac{1}{2 \cdot 2^1} \cancel{-\frac{1}{2 \cdot 2^2}} \cancel{+\frac{1}{2^3}} - \frac{1}{2 \cdot 2^4} \cancel{-\frac{1}{2 \cdot 2^5}} \cancel{+\frac{1}{2^6}} - \dots =$$

$$= -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{11}} - \dots$$

$$a = -\frac{1}{4} \qquad q = \frac{1}{8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq = a + aq + aq^2 + \dots \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} aq = a\frac{1-q^n}{1-q} \qquad S = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

$$S_n = -\frac{1}{4} \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}$$

$$\underline{\underline{S}} = \lim_{n \to \infty} S_n = -\frac{1}{4} \frac{1}{\frac{7}{8}} = \underline{\underline{-\frac{2}{7}}}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \quad [\infty]$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \begin{array}{ll} & -\sqrt{2} \\ \cancel{+\sqrt{3}} & \cancel{-\sqrt{3}} \\ \cancel{+\sqrt{4}} & \cancel{-\sqrt{4}} \\ \cancel{+\sqrt{5}} & \cancel{-\sqrt{5}} \\ \cancel{+\sqrt{6}} & \vdots \\ \vdots & \cancel{-\sqrt{n-1}} \\ \cancel{+\sqrt{n}} & \cancel{-\sqrt{n}} \\ +\sqrt{n+1} & \end{array} = -\sqrt{2} + \sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\sqrt{2} + \infty = \underline{\underline{\infty = S}}$$

$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2-3k+2}$ $[\frac{1}{2}]$

$$\frac{1}{(k-1)(k-2)} = \frac{-1}{k-1} + \frac{1}{k-2}$$

$$S_n = \sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

1.2 Vyšetřete konvergenci řady.

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1}$ $[D]$

$$\frac{k}{(k-1)(k+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{k-1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+1}$$

$$\underline{\underline{D}} \longleftarrow D$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \qquad D - \text{vižď}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots D$$

$$\sum \frac{k^4}{k!} \quad [K]$$

PODÍLOVÉ KRITERIUM, LIMITNÍ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \begin{cases} < 1 & \ldots K \\ > 1 & \ldots D \\ = 1 & \ldots \text{NELZE ZJISTIT P.K., L.} \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^4}{(k+1)!}}{\frac{k^4}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+4)^4\, k!}{k^4\,(k+1)k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{k^4} =$$

$$= 0 < 1 \to \underline{\underline{K}}$$

$$\sum \frac{3^k}{(k+1)!} \quad [K]$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3^{k+1}}{(k+2)!}}{\frac{3^k}{(k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k+2} = 0 < 1 \to \underline{\underline{K}}$$

$\sum \frac{k^k}{k!}$ [D]

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e > 1 \rightarrow \underline{\underline{D}}$$

$\sum \frac{1}{\ln^k k}$ [K]

ODMOCNINOVÉ KRITÉRIUM, LIMITNÍ

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \begin{cases} < 1 & \dots \ K \\ > 1 & \dots \ D \\ = 1 & \dots \ \text{NELZE URČIT O.K., L.} \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1 \rightarrow \underline{\underline{K}}$$

$\sum \frac{7^k}{k^3}$ [D]

ODMOCNINOVÉ KRITERIUM

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{7}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^3} = 7 > 1 \to \underline{\underline{D}}$$

$\sqrt[k]{k} \to 1$

NEBO PODÍLOVÉ KRITERIUM

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{7^{k+1}}{(k+1)^3} \frac{k^3}{7^k} = \lim_{k\to\infty} 7 \frac{k^3}{(k+1)^3} = 7 > 1 \to \underline{\underline{D}}$$

$\frac{k^3}{(k+1)^3} \to 1$

$\sum \frac{k}{2^k}$ [K]

ODMOCNINOVÉ KRITERIUM

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \to \underline{\underline{K}}$$

$\sqrt[k]{k} \to 1$

$\sum \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ [D]

SROVNÁVACÍ KRITERIUM

$0 < a_k < b_k$

$\sum a_k \; D \Rightarrow \sum b_k \; D$

$\frac{1}{\sqrt{k^2-1}} > \frac{1}{k} > 0 \quad \sum \frac{1}{k} \; D \to \underline{\underline{\sum \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \; D}}$

$\sum \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k$ [D]

NUTNÁ PODMÍNKA KONVERGENCE

$\sum a_k \; K \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

$\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k+2-1}{k+2}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k+2}\right)^k =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{k+2}\right)^{k+2} \to e^{-1}}{\left(1-\frac{1}{k+2}\right)^2 \to 1} = e^{-1} \neq 0 \to \underline{D}$

$$\sum a_k, \text{ kde } a_k = \begin{cases} \frac{2^k}{k^k}, & k \text{ sudá}, \\ \frac{1}{2^k}, & k \text{ lichá} \end{cases}$$

ODMOCNINOVÉ, LIMITNÍ

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \lim \frac{2}{k} = 0 \; \ldots \; k \text{ SUDÉ} \\ \lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; \ldots \; k \text{ LICHÉ} \end{cases} \text{NEEXISTUJE}$$

NEFUNGUJE, ZKUSÍM NELIMITNÍ $\exists q \in (0,1) ; \sqrt[k]{a_k} \leq q \Rightarrow \sum a_k \; K$

k: 3, 4, 5, 6, 7, 8 ...

$$\left\{\sqrt[k]{a_k}\right\}_{k=3}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \quad \sqrt[k]{a_k} \leq \frac{1}{2} \in (0,1) \to \underline{\underline{K}}$$

POZNÁMKY – STAČÍ, KDYŽ PODMÍNKY Z KRITERIÍ PLATÍ PRO VŠECHNA k KROMĚ PRVNÍCH KONEČNĚ MNOHA.

– KRITERIA PLATÍ JEN PRO ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČLENY.

1.3 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady.

$\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ [Konverguje neabsolutně]

ŘADA MÁ I ZÁPORNÉ ČLENY – ZJISTÍM ABSOLUTNÍ KONVERGENCI

$\sum \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ŘADA S NEZÁPORNÝMI ČLENY

INTEGRÁLNÍ KRITERIUM

$a(x)$ SPOJITÁ, NEROSTOUCÍ NA $\langle 1, \infty)$

$\sum_{k=1}^{\infty} a(k)$ K PRÁVĚ KDYŽ $\int_1^{\infty} a(x)\,dx$ K

—〃— D — 〃 — 〃 — D

$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ SPOJITÁ, NEROSTOUCÍ NA $\langle 1, \infty)$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[2\sqrt{x+1} \right]_1^{\infty} = \infty \rightarrow$

$\rightarrow \sum |a_k|$ D $\rightarrow$ $\underline{\sum a_k \text{ NEKONVERGUJE ABSOLUTNĚ}}$

NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE – LEIBNIZOVO KRITERIUM

$$\left.\begin{array}{l} a_k \geq 0 \\ a_k \text{ JE NEROSTOUCÍ} \\ \lim_{k \to \infty} a_k = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ K}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq 0 \\ \text{NEROSTE} \\ \xrightarrow{k \to \infty} 0 \end{array}\right\} \quad \underline{\sum a_k \text{ KONVERGUJE}}$$

TEDY $\underline{\underline{\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \text{ KONVERGUJE NEABSOLUTNĚ}}}$

$$\sum \frac{(-1)^k}{2^{k^2}} \quad \text{[Konverguje absolutně]}$$

$$\sqrt[k]{2^{k^2}} = \left(2^{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = 2^{\frac{k^2}{k}} = 2^k$$

$$\sum \left| \frac{(-1)^k}{2^{k^2}} \right| = \sum \frac{1}{2^{k^2}}$$

ODMOCNINOVÉ KRITERIUM

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0 < 1 \rightarrow \sum |a_k| \text{ KONVERGUJE} \rightarrow$$

$\rightarrow \sum a_k$ KONVERGUJE ABSOLUTNĚ $\rightarrow$ $\sum a_k$ KONVERGUJE

TEDY $\sum \frac{(-1)^k}{2^{k^2}}$ KONVERGUJE ABSOLUTNĚ I NEABSOLUTNĚ

$$\sum \frac{sin(k\frac{\pi}{7})}{k^{\frac{3}{2}}} \quad \text{[Konverguje absolutně]}$$