Matematická analýza 1, 1. paralelka - obory EEM, EK, první cvičení

Karel Pospíšil

1 Kvadratické polynomy.

1.1 Najděte řešeni rovnic kvadratických dle vlastni volby.

1.2 Najděte řešeni rovnice bez použití diskriminantu.

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x^2 - 5x = 6$

1.3 Doplňte na čtverec.

$x^2 + 4x - 6$

1.4 Najděte řešeni nerovnice.

$x^2 + 6x \leq -16$

1.5 Odvoďte vzorec pro řešení kvadratické rovnice.

2 Definiční obory funkcí

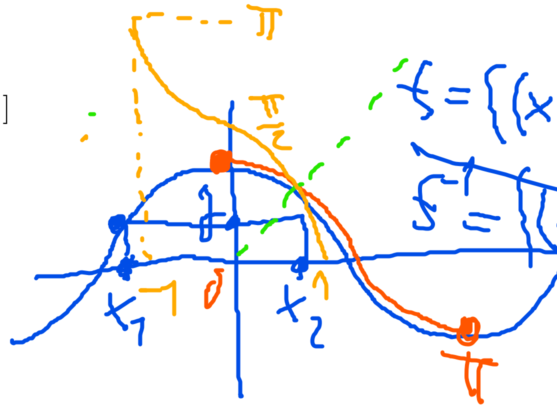
2.1 Určete definiční obor funkce.

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+5x-6}{3-x}}, \quad [(-\infty, -6\rangle \cup \langle 1, 3)]$

$f(x) = \ln(\log(\ln(x))), \quad [(e, \infty)]$

$f(x) = (x^2 - 6)^{\frac{1}{x}}, \quad [(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, \infty)]$

$f(x) = \arccos\frac{x+1}{3}$,   [$\langle -4, 2\rangle$]



$f = \{(x_1, y), (x_2, y), \dots\}$

$f^{-1} = \{(y, x_1), (y, x_2), \dots\}$

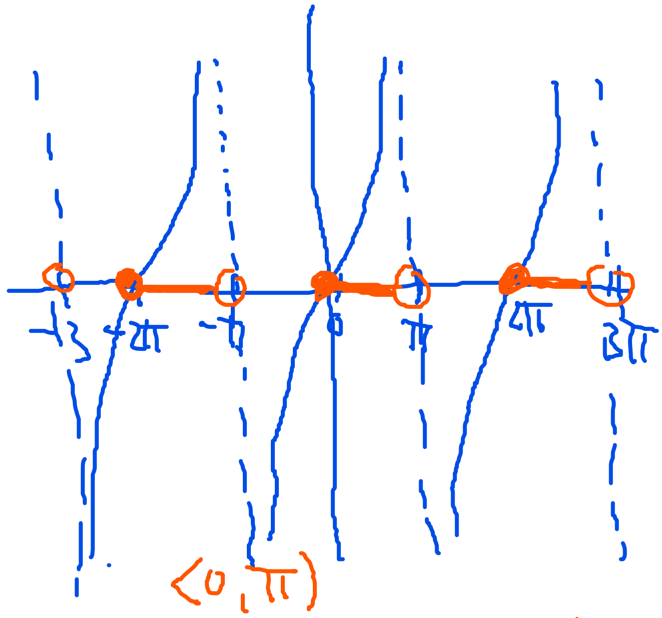
$$-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1$$

$$-3 \le x+1 \le 3$$

$$-4 \le x \le 2$$

$$\underline{\underline{D_{(f)} = \langle -4, 2\rangle}}$$

$f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$,   [$\cup_{k\in Z}\langle 2k\pi, (2k+1)\pi)$]



$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \pi + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \ge 0$$

$\langle 0, \pi)$

$\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

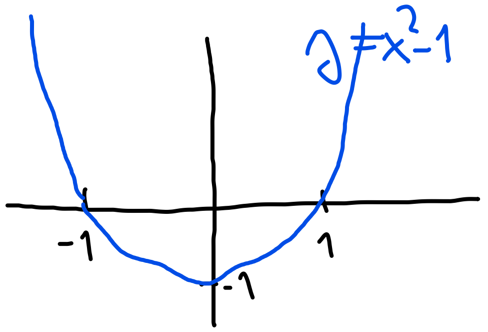
$$\underline{\underline{D_{(f)} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi)}}$$

$f(x) = \sqrt[x-3]{x^2 - 1}$,   [$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$], $x \neq 3$

$$f^g = e^{g \ln f}$$

$$f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{x-3}} = e^{\frac{1}{x-3}\ln(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow x \neq 3, \ x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{D_{(f)} = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)}}$$



3 Absolutní hodnota

3.1 Najděte řešeni nerovnice.

$|x-2|+3 \leq |x+1|$

1) $x < -1$

$-x+2+3 \leq -x-1$

$0x \leq -6$

$\emptyset$

$x \in \emptyset$

2) $x \in \langle -1, 2)$

$-x+2+3 \leq x+1$

$-2x \leq -4$

$x \geq 2$

$x \in \emptyset$

3) $x \geq 2$

$x-2+3 \leq x+1$

$0x \leq 0$

$x \geq 2$

$\underline{\underline{x \geq 2}}$

3.2 Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln(|x-5|-3)$. Potom promyslete rovnice typu $|x-a| \leq (<, \geq, >)\ b$.

$f(x) = \ln(|x-5|-3)$

BUĎ

$|x-5|-3 > 0$

1) $x < 5$

$-x+5-3 > 0$

$x < 2$

2) $x \geq 5$

$x-5-3 > 0$

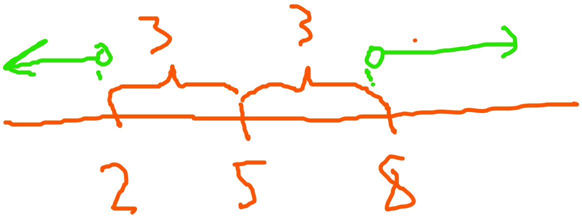
$x > 8$

$\underline{\underline{D(f) = (-\infty, 2) \cup (8, \infty)}}$

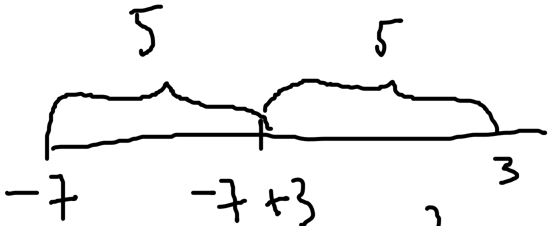
NEBO

$|x-5| > 3$

VZDÁLENOST X OD 5 > 3



$(-7, 3) = \{x \in \mathbb{R}; -7 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R}; |x+2| < 5\} = U_{(-2,5)}$

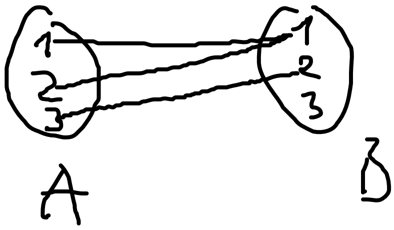


$\frac{-7+3}{2} = -2$

4 Zobrazení a funkce

4.1 Připomeňte si pojmy zobrazení, zobrazení prosté, na a vzájemně jednoznačné, inverzní zobrazení a skládání zobrazení . Totéž pro funkce.

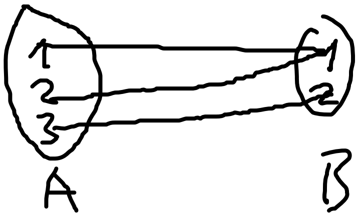
na: A do B



$y = x^2$

$\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$

A na B



$y = 2x$

$\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$

5 Goniometrie.

5.1 Připomeňte si základní hodnoty a vzorce goniometrických funkcí, hlavně vzorce pro dvojnásobný a poloviční argument, součtové vzorce, převod součinu na součet či rozdíl atd.

SAMOSTATNĚ !!!

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos					
⋮					

$\sin(2\alpha)\cos(5\alpha)$ $\qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(2\alpha)\cos(5\alpha)$ $\qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \ldots$ $\qquad |4+3i|$

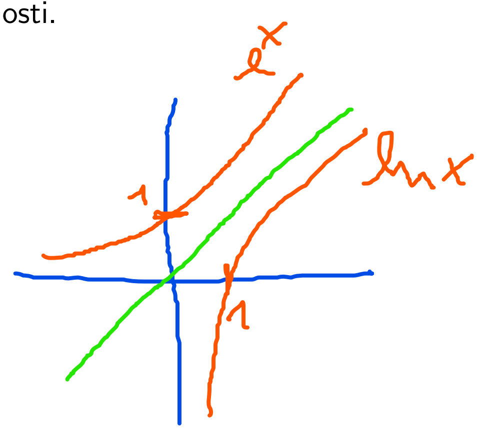
$5i$!

5.2 Výraz $\sin(2\alpha)\sin(5\alpha)$ převeďte na součet či rozdíl goniometrických funkcí.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(2\alpha)\cos(5\alpha) = \frac{\sin 7\alpha + \sin(-3\alpha)}{2}$$

6 Exponenciální a logaritmická funkce.

6.1 Načrtněte graf exponenciální a logaritmické funkce a určete jejich základní vlastnosti.



6.2 $log(x)$ převeďte na základ 3.

$$\log_{10} x = y \iff 10^y = x \qquad \log_3 10^y = \log_3 x$$
$$y \log_3 10 = \log_3 x \qquad y = \frac{\log_3 x}{\log_3 10}$$

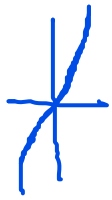
$f: y = f(x)$, $D(f)$, $H(f)$

$f^{-1}: x = f^{-1}(y)$, $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$

6.3 K $f(x) = sinh(x)$ najděte funkci inverzní .

$$y = \underbrace{\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{!}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = \mathbb{R}$



$$2y = e^x - e^{-x}$$

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x} \quad / \cdot e^x$$

$$2y e^x = e^{2x} - 1$$

$$e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$$

$$(e^x)^2 - 2y e^x - 1 = 0$$

$$D = 4y^2 + 4$$

$$e^x = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2}$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

NELZE

$$f^{-1}: x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

arg sinh

$$D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

7 Grafy funkcí.

7.1 Je dán graf nějaké funkce $f(x)$ a nějaké kladné a, načrtněte grafy funkcí $af(x), f(ax), f(x) + a, f(x + a)$.