Matematická analýza 1, 1.paralelka - obory EEM, EK, třetí cvičení

Karel Pospíšil

1 Derivace.

1.1 Spočtěte podle definice derivaci funkce sinus.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$(\sin x_0)' = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos\frac{x+x_0}{2} \sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}$$

$$= \underline{\underline{\cos x_0}}$$

$\frac{x-x_0}{2} \to 0$, $\to 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

VZOREC, ODVOZENÍ:

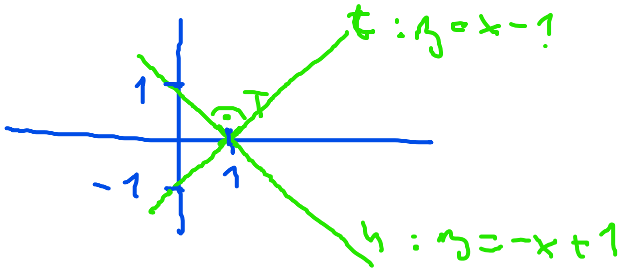
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

SOUČTOVÉ VZORCE, Z NICH ODEČTU JE

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

POLOŽÍM $\frac{x+x_0}{2} = \alpha$, $\frac{x-x_0}{2} = \beta$

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$$



1.2 Spočtěte podle definice derivaci funkce $f(x) = x^2 \ln x$ v bodě 1. Pro stejnou funkci pak ve stejném bodě spočtěte rovnici tečny a normály.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2\ln(1+h) - 1^2\ln(1)}{h} = \lim_{h\to 0} (1+h)^2 \frac{\ln(1+h)}{h} = \underline{\underline{1}}$$

→ 1, VZOREC

TEČNA: SMĚRNICE: $k = f'(1) = 1$
BOD: $T = (1, f(1)) = (1, 0)$ → $\underline{\underline{t: y = 1(x-1)+0}}$

NORMÁLA: SMĚRNICE: $-\frac{1}{k} = -1$
BOD: T → $\underline{\underline{n: y = -1(x-1)+0}}$

1.3 Zjistěte ve kterém bodě je tečna k $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 2$ vodorovná.

BUDE TO BOD, KDE JE DERIVACE NULOVÁ.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 = 0 \to x^2 - 2x - 2 = 0 \to \underline{\underline{x_{1,2}}} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \underline{\underline{1 \pm \sqrt{3}}}$$

$(f+g)' = f' + g'$, $(kf)' = kf'$

$(x^a)' = a x^{a-1}$ $(k)' = 0$

1.4 Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 3$ rovnoběžné s přímkou $x + y - 1 = 0$.

NEJDŘÍV NAJDU TEČNÝ BOD, $T = (t_1, t_2)$. SMĚRNICE TEČNY JE $f'(t_1)$, ALE TAKÉ -1, STEJNÁ JAKO U ZADANÉ PŘÍMKY, TEDY PLATÍ:

$$f'(t_1) = -1 \to 2t_1 = -1 \to t_1 = -\frac{1}{2},\ t_2 = f(t_1) = -\frac{11}{4}$$

TEČNA JE TEDY PŘÍMKA SE SMĚRNICÍ $k = -1$ PROCHÁZEJÍCÍ BODEM $T = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$, S ROVNICÍ $y = k(x - t_1) + t_2$

TEDY: $t: y = -\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{11}{4}$.

1.5 Najděte derivaci funkce. Nezapomeňte určit D(f) a D(f').

OPERACE S DERIVACEMI

DERIVACE ELEMENTÁRNÍCH FCÍ

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g) \cdot g'(x)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^x$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^x + x^{\frac{1}{3}} e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $D(f') = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(x) = \frac{x^3+3x+5}{x^4+x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+3)(x^4+x^2+1) - (x^3+3x+5)(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)}$$

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x \ln(2x)}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x \ln(2x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\ln(2x) + x \frac{1}{2x} 2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x > 0 \to x > 0 \\ \ln(2x) \geq 0 \to 2x \geq 1 \to x \geq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad D(f) = \left(0, \tfrac{1}{2}\right\rangle,\ D(f') = \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$f(x) = \sin(\cos x \log(2x))$

$f(x) = \mathrm{tg}^3(2x)\, e^{2x} \sinh(x) + \frac{1}{\cosh(x)}$

$$\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right)' = \left((\cosh(x))^{-1}\right)' = -1(\cosh(x))^{-2} \cdot \sinh x$$

$$f'(x) = (\mathrm{tg}^3(2x))' e^{2x} \sinh(x) + \mathrm{tg}^3(2x)(e^{2x})' \sinh x + (\mathrm{tg}^3(2x) e^{2x} \sinh(x))' - \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)} =$$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2(2x) \frac{1}{\cos^2(2x)} 2\, e^{2x} \sinh(x) + \mathrm{tg}^3(2x)\, 2 e^{2x} \sinh x + \mathrm{tg}^3(2x)\, e^{2x} \cosh(x) - \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$$

1.6 Pomocí věty o derivaci inverzní funkce odvoďte derivaci funkce arkustangens, znáte-li derivaci funkce tangens.

$$[\underbrace{f^{-1}(x)}_{y}]' = \frac{1}{[f(\underbrace{y}_{x})]'}$$

$$[\underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{y}]' = \frac{1}{[\underbrace{\operatorname{tg}(y)}_{x}]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

1.7 Pomocí věty o derivaci inverzní funkce odvoďte derivaci funkce arkussinus, znáte-li derivaci funkce sinus.

1.8 Pokračujte v derivovaní.

$f(x) = \pi\big(\arcsin(\sqrt{x})\big)^4$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \pi 4 \cdot \left(\arcsin(\sqrt{x})\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$-1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \qquad x \geq 0$

$D(f) = \langle 0, 1 \rangle \qquad D(f') = (0, 1)$

$$f(x) = \sqrt{1-x} + \ln(x^3 - 8) = (1-x)^{\frac{1}{2}} + \ln(x^3-8)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) + \frac{3x^2}{x^3-8}$$, ALE :

$x \leq 1 \quad x^3 - 8 > 0 \to x > 2$

$\underline{\underline{D(f) = \emptyset}} \xrightarrow{D(f') \subseteq D(f)} \underline{\underline{D(f') = \emptyset}}$ → DERIVACE NENÍ (I KDYŽ Z MECHANICKY ZÍSKANÉHO VZORCE SE ZDÁ, ŽE ANO)

$$f(x) = (\operatorname{arctg}(x+2))^{x^2} = e^{x^2 \ln(\operatorname{arctg}(x+2))}$$

$$f'(x) = \underline{\underline{e^{x^2 \ln(\operatorname{arctg}(x+2))} \cdot \left(2x \ln(\operatorname{arctg}(x+2)) + x^2 \frac{1}{\operatorname{arctg}(x+2)} \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}\right)}}$$

$\operatorname{arctg}(x+2) > 0 \to x+2 > 0 \to x > -2$

$\underline{\underline{D(f) = (-2, \infty)}} \qquad \underline{\underline{D(f') = (-2, \infty)}}$

1.9 Derivujte bez určení definičního oboru.

$f(x) = \operatorname{argtgh} \frac{\operatorname{arctg}(x^3+5)\ \arccos(2x)}{\operatorname{tgh}(4^x)}$

1.10 Zjistěte existenci derivace funkce $f(x) = \operatorname{arctg}|x-3|$ v bodě tři.

$$\left.\begin{aligned} &x>3,\quad f(x) = \operatorname{arctg}(x-3),\quad f'(x) = \frac{1}{1+(x-3)^2},\quad f'(3^+) = 1 \\ &x<3,\quad f(x) = \operatorname{arctg}(-x+3),\quad f'(x) = \frac{-1}{1+(-x+3)^3},\quad f'(3^-) = -1 \end{aligned}\right\} \to f'(3)\ \underline{\underline{\text{NEEX}}}$$

1.11 Dokažte.

$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}$ na $I\!R$.

$(\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arccotg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \to$ LEVÁ STRANA JE KONSTANTA, STAČÍ ZJISTIT JAKÁ.

NAPŘ. $\mathrm{arctg}\,1 + \mathrm{arccotg}\,1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \to$ ROVNOST PLATÍ

2 Derivace vyšších řádů.

2.1 Najděte druhou derivaci funkce.

$f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^x$

$f''(x) = (x^{\frac{2}{3}} e^x)'' = (\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} e^x + x^{\frac{2}{3}} e^x)' = \frac{2}{3}(-\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} e^x + x^{-\frac{1}{3}} e^x) + (\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} e^x + x^{\frac{2}{3}} e^x)$, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{x^3+3x+5}{x^4+x^2+1}$

2.2 Najděte dvacátou derivaci funkce.

$f(x) = \sin(2x)$

$$f^{(20)}(x) = 2^{20} \sin(2x)$$

$f(x) = (x^3 + 3x + 5)e^x$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$ LEIBNIZŮV VZOREC

$$\left((x^3+3x+5)e^x\right)^{(20)} = \binom{20}{0}(x^3+3x+5)^{(0)}(e^x)^{(20)} + \binom{20}{1}(x^3+3x+5)^{(1)}(e^x)^{(19)} +$$
$$+\binom{20}{2}(x^3+3x+5)^{(2)}(e^x)^{(18)} + \binom{20}{3}(x^3+3x+5)^{(3)}(e^x)^{(17)} = \dots$$

$f(x) = \cos(3x - \pi)(x^4 + x^2 + 1)$