Matematická analýza 1, 1.paralelka - obory EEM a EK,
páté cvičení

Karel Pospíšil

1 Průběh funkce.

1.1 Vyšetřete průběh funkcí.

$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, $D(f): x > 0,\ x \neq 1$ $\quad D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \left(\!\left(\frac{0^+}{-\infty}\right)\!\right) = 0$

$\lim_{x \to 1^{\mp}} f(x) = \left(\!\left(\frac{1}{0^{\mp}}\right)\!\right) = \mp\infty \to$ SV. AS.: $x = 1$

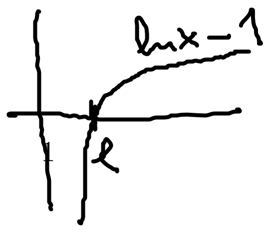
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \left(\!\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\!\right) \overset{l'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x = \infty \to$ VOD. AS. NENÍ

ŠIKMÁ ASYMPTOTA: $y = ax + b$, PLATÍ: $\lim (f(x) - (ax+b)) = 0$
POPŘÍPADĚ $a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$; a MUSÍ BÝT KONEČNÉ A NENULOVÉ

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \to$ ŠIKMÁ AS. NENÍ

$(f(x))' = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{1 \ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$ $\quad$ ST. B.: $x = e$ - ZNAMÉNKO DERIVACE URČÍ MONOTONII A EXTRÉMY

x	$(0,1)$	$(1,e)$	(e,∞)
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↘	↗



KLESÁ NA $(0,1)$ A $(1,e)$
ROSTE NA (e,∞)
LOK. MIN. (e,e)

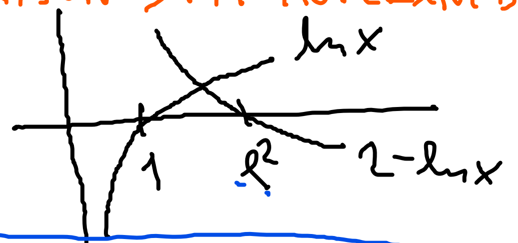
POZNÁMKA:
EXISTENCI A TYP EXTRÉMU VE STACIONÁRNÍM BODĚ MOHU NĚKDY ZJISTIT DOSAZENÍM STACIONÁRNÍHO BODU DO $f''(x)$
ZDE $f''(e) = \frac{2-1}{e \cdot 1} > 0 \to$ LOK. MIN. V e. PODOBNĚ PRO I.B. A $f'''(x)$.

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)\,2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - (\ln x - 1)2}{x\ln^3 x}$$

$$= \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} = 0 \qquad x = e^2$$

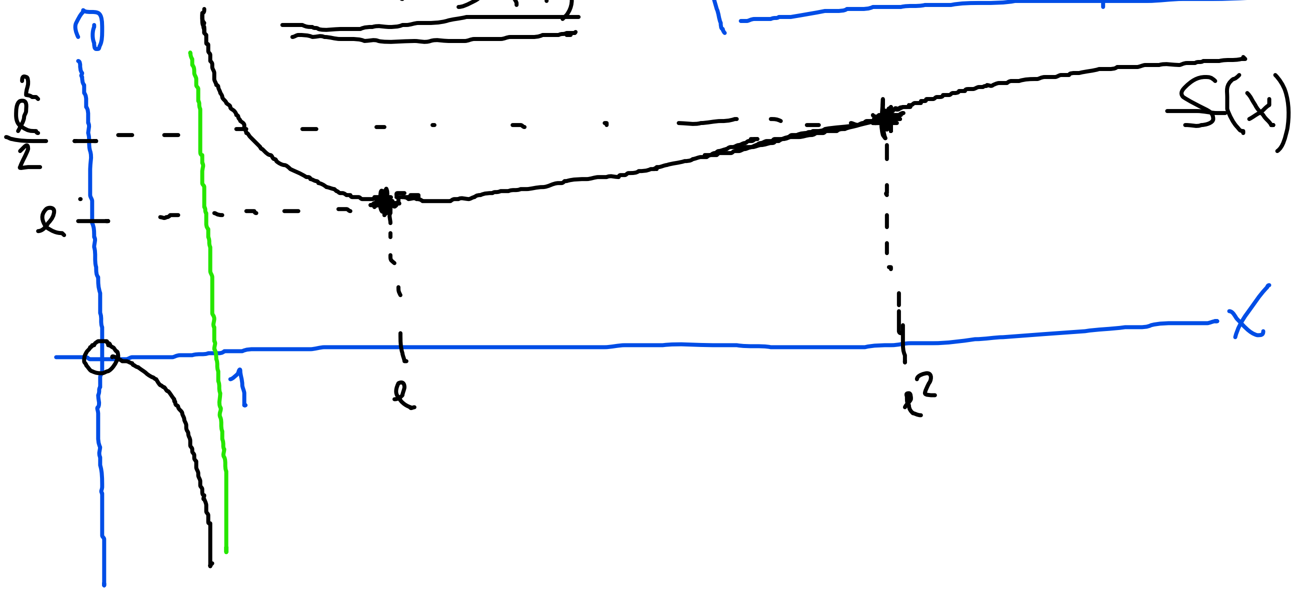
ZNAMÉNKO DRUHÉ DERIVACE URČÍ KONVEXNOST, KONKÁVNOST A INFLEXNÍ BODY

x	$(0,1)$	$(1,e^2\rangle$	$\langle e^2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$



KONVEXNÍ NA $(1, e^2\rangle$
KONKÁVNÍ NA $(0,1)$ A $\langle e^2, \infty)$
INF. B. $\left[e^2, \frac{e^2}{2}\right]$

GRAF $f(x)$



$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

$f(x) = |x|\,e^x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ST.B.	INF.B.
$x<0$	$-xe^x$	$-(e^x+xe^x)=-e^x(1+x)$	$-(e^x(1+x)+e^x)=-e^x(2+x)$	-1	-2
$x=0$		$f'(0^-)=-1 \neq 1 = f'(0^+)$ NEEX.	NEEX.		
$x>0$	xe^x	$e^x(1+x)$	$e^x(2+x)$	$\cancel{-1}$	$\cancel{-2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \langle\langle \infty\cdot 0\rangle\rangle = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{e^{-x}} = \langle\langle \frac{\infty}{\infty}\rangle\rangle \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{+1}{+e^{-x}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \langle\langle \infty\cdot\infty\rangle\rangle = \underline{\underline{\infty}} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \underline{\underline{\infty}}$$

SVIS. AS. NEJSOU $\qquad$ ŠIKMÉ AS. NEJSOU

VOD. AS.: $y = 0$

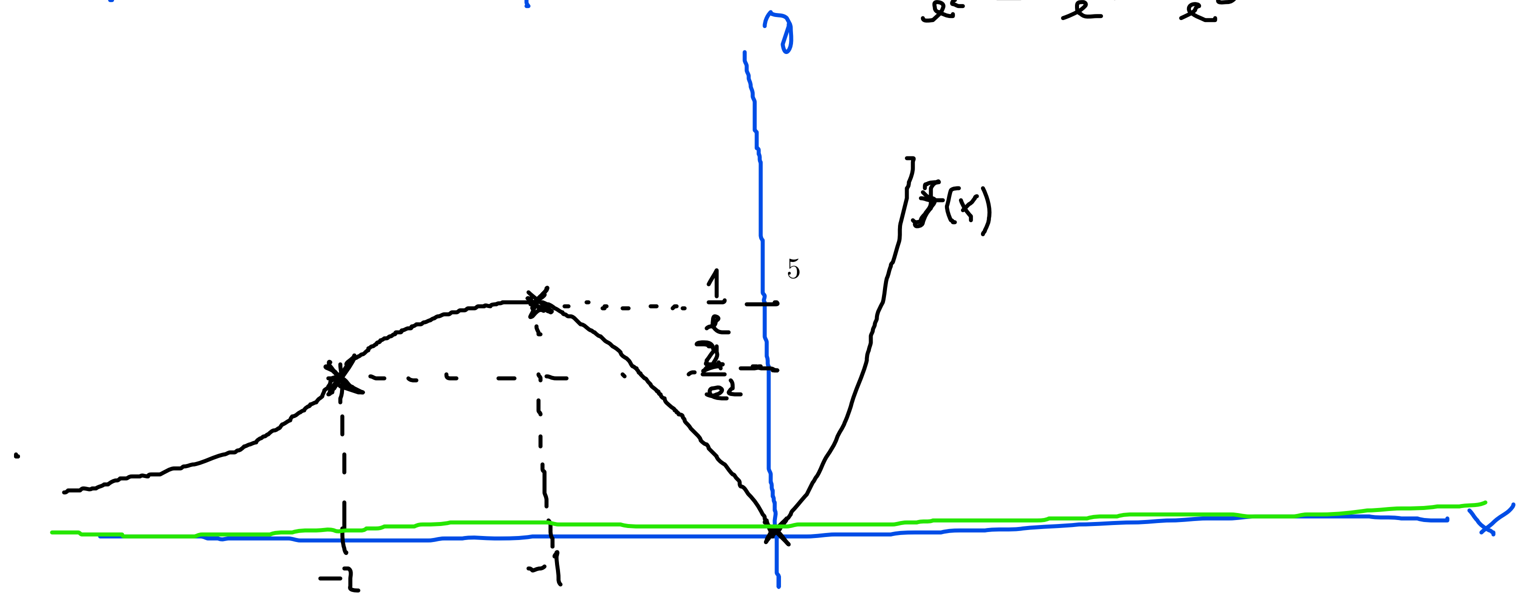
x	$(-\infty,-1\rangle$	$\langle -1,0\rangle$	$\langle 0,\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

KLESÁ NA $\langle -1,0\rangle$
ROSTE NA $(-\infty,-1\rangle$ A $\langle 0,\infty)$
LOK.MIN.: $(0,0)$, LOK.MAX.: $(-1, \frac{1}{e})$

x	$(-\infty,-2\rangle$	$\langle -2,0\rangle$	$\langle 0,\infty)$
$f''(x)$	+	−	+
$f'(x)$	↗	↘	↗
$f(x)$	∪	∩	∪

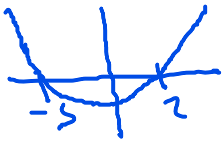
KONVEX. NA $(-\infty,-2\rangle$ A $\langle 0,\infty)$
KONKÁV. NA $\langle -2,0\rangle$
INF. B.: $(-2, \frac{2}{e^2})$, $(0,0)$

$$\frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} > \frac{2}{e^2}$$



SPOČTI ŠIKMÉ ASYMPTOTY $f(x) = 2\sqrt{x^2+x-6} - x$.

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$



$$D(f) = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$$

1) V ∞ :

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x^2+x-6} - x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(2\sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} - 1\right) = 1$$

$\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \to 0$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(2\sqrt{x^2+x-6} - x - 1x\right) =$$

$a \quad -b \qquad a \quad +b$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(2\sqrt{x^2+x-6} - 2x\right)\left(2\sqrt{x^2+x-6} + 2x\right)}{2\sqrt{x^2+x-6} + 2x} =$$

$a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4(x^2+x-6) - 4x^2}{2\sqrt{x^2+x-6} + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 12}{\sqrt{x^2+x-6} + x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{12}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} + 1} = 1$$

$\frac{12}{x} \to 0$, $\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \to 0$

ŠIKMÁ AS.: $y = ax + b = 1x + 1$

PROTOŽE $\sqrt{x^2} = -x$ PRO $x < 0$

2) V $-\infty$:

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\sqrt{x^2+x-6} - x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-2\sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-2\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} - 1\right) = -3$$

$\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \to 0$

$a \quad +b \qquad a \quad -b$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(2\sqrt{x^2+x-6} - x + 3x\right)\left(2\sqrt{x^2+x-6} - 2x\right)}{2\sqrt{x^2+x-6} - 2x} =$$

$a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4(x^2+x-6) - 4x^2}{2\sqrt{x^2+x-6} - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 12}{\sqrt{x^2+x-6} - x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{12}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}-1} = -1$$

$\sqrt{x^2} = -x$

ŠIKMÁ AS.: $y = ax + b = -3x - 1$

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{4}+1}$

$D(f) = \mathbb{R}$

SYMETRICKÝ, $f(-x) = f(x)$ → FUNKCE SUDÁ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \left\langle\!\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\right\rangle \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{2}}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}}$$

L'H NEFUNGUJE,

BEZ L'H:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{x^2}{4}+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{x^2} \to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \ldots$$

$\frac{f(x)}{x}$ JE $\frac{\text{SUDÁ}}{\text{LICHÁ}}$, TEDY LICHÁ

SVISLÉ AS. NEJSOU, VODOROVNÉ AS. NEJSOU,

ŠIKMÉ AS.: $y = ax + b$, $a = \pm\frac{1}{2}$, $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} \mp \frac{1}{2}x\right) = \langle\langle \infty - \infty \rangle\rangle = \lim_{x\to\pm} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} \mp \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} \pm \frac{x}{2}} \left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} \pm \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{4}+1-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} \pm \frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} \pm \frac{x}{2}} = 0$$

ŠIKMÉ AS.: $y = \pm\frac{x}{2}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\right)' = \frac{\frac{x}{2}}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}} = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}} = 0$$

ST. B.: 0

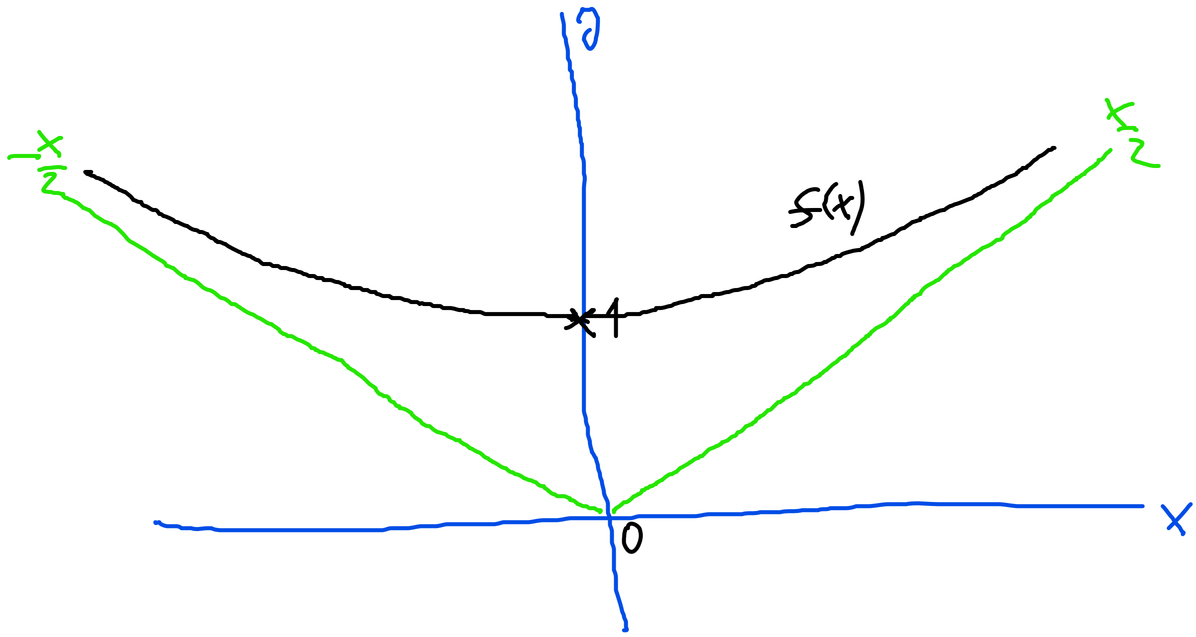
x	$(-\infty, 0\rangle$	$\langle 0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

ROSTE NA $\langle 0, \infty)$
KLESÁ NA $(-\infty, 0\rangle$
LOK. MIN. $(0, 1)$

$$f''(x) = \left(\frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}}\right)' = \frac{4\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} - x\frac{\frac{x}{2}}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}}}{16\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} = \frac{8\left(\frac{x^2}{4}+1\right) - \frac{x^2}{4}}{16\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{7\frac{x^2}{4}+8}{16\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ROVNICE $f''(x) = 0$ NEMÁ ŘEŠENÍ

$f''(x) > 0$ NA $D(f)$ $\rightarrow$ $f(x)$ JE KONVEXNÍ NA $D(f)$



2 Globální extrémy funkce.

2.1 Najděte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 8|x-1| + 8$ na množině $M = \langle -1, 6\rangle$.

VÝSLEDEK ZÍSKÁM POROVNÁNÍM HODNOT V BODECH

1) STACIONÁRNÍCH

	$f(x)$	$f'(x)$	ST. B.
$x < 1$	x^2+8x	$2x+8$	$-4 \notin M$
$x > 1$	$x^2-8x+16$	$2x-8$	$\underline{4}$

2) VE KTERÝCH NEEXISTUJE DERIVACE

$f(1^-) = 10 \neq -6 = f(1^+) \rightarrow f'(1)$ NEEX.

3) KRAJNÍCH MNOŽINY M

$\underline{f(4)} = 16-32+16 = \underline{0}$

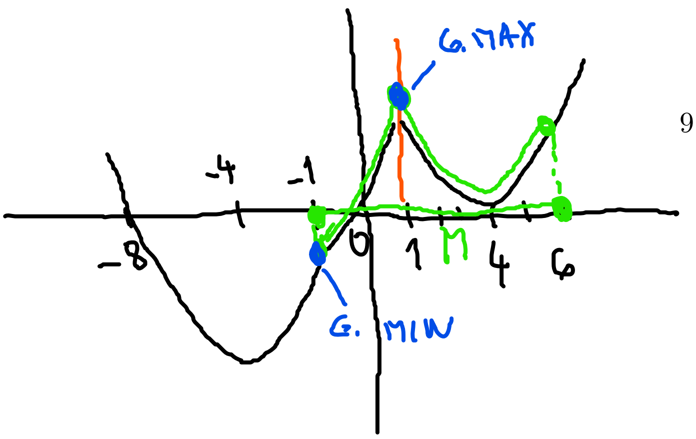
$\underline{f(1) = 9}$

$\underline{f(-1) = -7}$

$\underline{f(6)} = 36-48+16 = \underline{4}$

GLOBÁLNÍ MAXIMUM 9 V BODĚ 1

GLOBÁLNÍ MINIMUM -7 V BODĚ -1



2.2 Určete největši a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = sinx - xcosx - \frac{x^2}{2}$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.