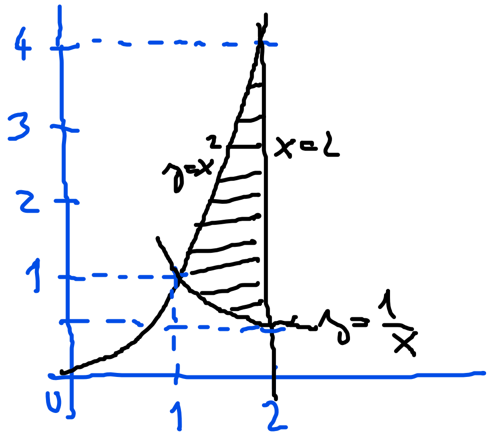
Matematická analýza 1,1.paralelka - obory EEM a EK, deváté cvičení

Karel Pospíšil

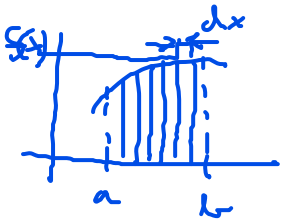
1 Aplikace určitého integrálu

1.1 Najděte obsah plochy mezi přímkou x=2 a křivkami $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$.



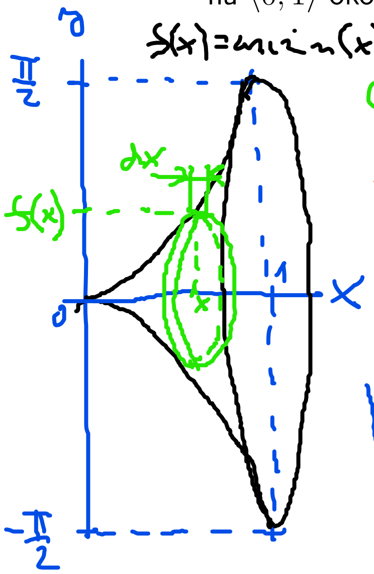
$$S = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \ln 2 = \underline{\underline{\frac{7}{3} - \ln 2}}$$



$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

1.2 Najděte objem tělesa vzniklého rotací plochy pod grafem funkce $y = \arcsin(x)$ na $\langle 0, 1\rangle$ okolo osy x .



OBJEM VÁLCE $\pi\cdot f^2(x)\cdot dx$

SOUČET OBJEMŮ VŠECH VÁLCŮ NA $\langle 0,1\rangle$ ... OBJEM TĚLESA

$$V = \int_0^1 \pi f^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 \arcsin^2(x)\,dx =$$

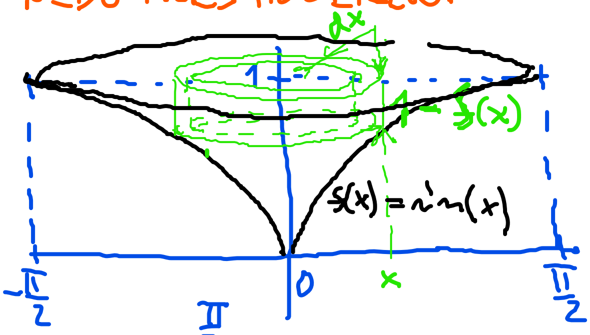
$$\left|\begin{array}{ll} u = \arcsin^2(x) & v' = 1 \\ u' = \dfrac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array}\right|$$

$$= \pi\left(\left[x\arcsin^2(x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \arcsin(x)\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = \arcsin(x) & v' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{array}\right| = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\left(\left[-\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)\right]_0^1 + \int_0^1 1\,dx\right)\right) =$$

$$= \underline{\underline{\pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)}}$$

NEBO PŘES INVERZNÍ FUNKCI



OBJEM PLÁŠTĚ VÁLCE, PO ROZVINUTÍ KVÁDRU

$2\pi x\cdot(1 - f(x))\cdot dx$

SOUČET OBJEMŮ NA $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ ... OBJEM TĚLESA

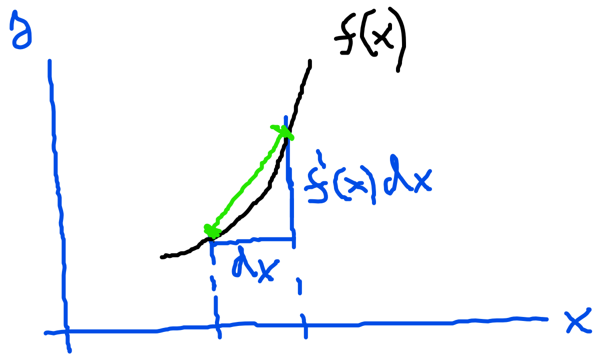
$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)\,dx = 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx\right) =$$

$$\left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(x) \\ u' = 1 & v = -\cos(x) \end{array}\right|$$

$$= 2\pi\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(-\left[x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi^2}{8} - \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi^3}{4} - 2\pi}}$$

1.3 Najděte délku grafu funkce $f(x) = \cosh(x)$ pro $x \in \langle -2, 2 \rangle$.



DÉLKA ČÁST KŘIVKY

$$\sqrt{(f'(x)\,dx)^2 + (dx)^2} = \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\;dx$$

SOUČET ČÁSTÍ NA $\langle -2, 2 \rangle$ ...

$\int$ ... DÉLKA KŘIVKY

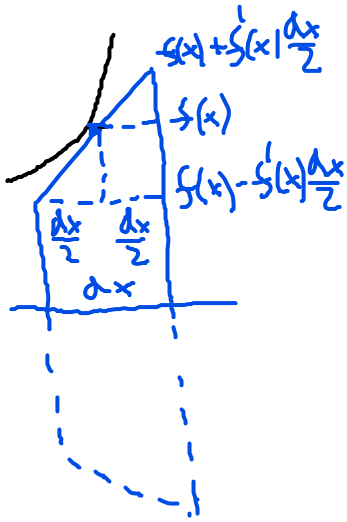
$$\int_{-2}^{2} \sqrt{((\cosh(x))')^2 + 1}\;dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{\sinh^2(x) + 1}\;dx =$$

$$\int_{-2}^{2} \cosh(x)\,dx = \Big[\sinh(x)\Big]_{-2}^{2} = \sinh(2) - \sinh(-2) = \underline{\underline{2\sinh(2)}}$$

sinh JE LICHÁ

1.4 Najděte obsah rotační plochy vzniklé rotací křivky $f(x) = x^2 + 1,\ x \in \langle 0, 2\rangle$ kolem osy x.

$$\pi (r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$



$$\pi \cdot 2f(x) \cdot \sqrt{(dx)^2 + (f(x) + f'(x)\tfrac{dx}{2} - f(x) + f'(x)\tfrac{dx}{2}} =$$

$$= 2\pi f(x) \cdot \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)\,dx)^2} =$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)}\,dx$$

$\vdots$

ATD