MA2 - DEVÁTÉ CVIČENÍ

~~Funkční řady, Weierstrasscovo kritérium. Mocninné řady.~~

Karel Pospíšil

1 Mocninné řady

1.1 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{(3k-1)}$.

[na $(-1,0)$ konverguje absolutně, v -1 neabsolutně]

ŘADA ABSOLUTNÍCH HODNOT

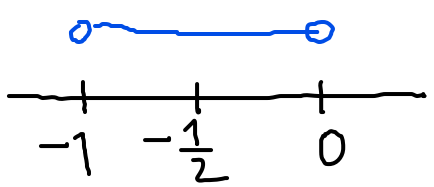
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(2x+1)^k}{(3k-1)}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|2x+1|^k}{3k-1}$$

PODÍLOVÉ KRITERIUM, LIMITNÍ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|2x+1|^{k+1}}{3(k+1)-1}\cdot\frac{3k-1}{|2x+1|^k} = |2x+1|\lim_{k\to\infty}\frac{3k-1}{3k+2} =$$

$$= |2x+1| < 1 \to 2\left|x+\frac{1}{2}\right| < 1 \to \left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

AK NA $x \in (-1,0)$



PRO $x = 0$ $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k+1}$ $\quad$ D (SROVNÁVACÍ, INTEGRÁLNÍ KRIT.)

PRO $x = -1$ $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ $\quad$ AK NE ŘADA ABS. H. JAKO PRO $x = 0$

K AND LEIBNIZOVO KRITERIUM

TEDY A.K. NA $(-1,0)$ K. NA $\langle -1,0)$

1.2 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 4k^2(\frac{x}{3}+1)^k$.

[na $(-6, 0)$ konverguje absolutně]

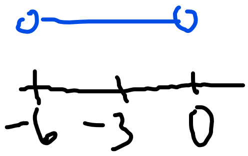
ŘADA ABSOLUTNÍCH HODNOT

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4k^2\left|\frac{x}{3}+1\right|^k$$

PODÍLOVÉ KRITERIUM, LIMITNÍ

$$\lim_{k\to\infty} 4(k+1)^2\left|\frac{x}{3}+1\right|^{k+1}\cdot\frac{1}{4k^2\left|\frac{x}{3}+1\right|^k}=\left|\frac{x}{3}+1\right|\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+k+1}{k^2}=$$

$$=\left|\frac{x}{3}+1\right|\cdot 1<1\ \to\ |x+3|<3$$



AK NA
$\underline{x\in(-6,0)}$

PRO $x=0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4k^2 \quad D \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0\right)$$

PRO $x=-6$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 4k^2 \quad D \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0\right)$$

TEDY $\underline{\text{A.K. i K. NA } (-6,0)}$

1.3 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{(k+5)^2}$.

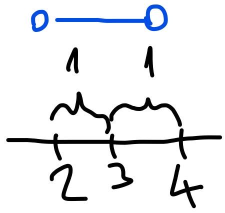
[na $\langle 2, 4 \rangle$ konverguje absolutně]

ŘADA ABS. HODNOT

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)^2} |x-3|^k$$

PODÍLOVÉ KRITERIUM

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{(k+6)^2}(k+5)^2 |x-3| = |x-3| \cdot 1 < 1$$



AK NA

$x \in (2,4)$

PRO $x = 4$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)^2}$$

ŘADA ABS. HODNOT

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)^2}$$

SROVNÁVACÍ KRITERIUM

$$\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{(k+5)^2} \geq 0 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)^2} \geq 0 \to$$

$\to$ K $\to$ AK

PRO $x = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)^2} (-1)^k$$

ŘADA ABS. HODNOT

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)^2}$$

K $\to$ AK

TEDY AK i K NA $\langle 2,4 \rangle$

1.4 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{\sqrt{(k+5)^k}}$.

[na $\mathbb{R}$ konverguje absolutně]

ŘADA ABS. HODNOT

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(k+5)^k}} |x-5|^k$$

ODMOCNINOVÉ KRITERIUM

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+5}} |x-5| = |x-5| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+5}} = |x-5| \cdot 0 < 1$$

$$|x-5| < \infty$$

$\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{AK I K NA } \mathbb{R}}}$

1.5 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k^2+1)^k}{\sqrt{(k+5)^k}}(x-3)^k$.

[konverguje absolutně pro $x = 3$]

ŘADA ABS. HODNOT

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k^2+1)^k}{\sqrt{(k+5)^k}} |x-3|^k$$

ODMOCNINOVÉ KRITERIUM

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k^2+1}{\sqrt{k+5}} |x-3| = |x-3| \infty < 1$$

$$|x-3| < 0$$

$\rightarrow$ AK I K JE PRO $x=3$