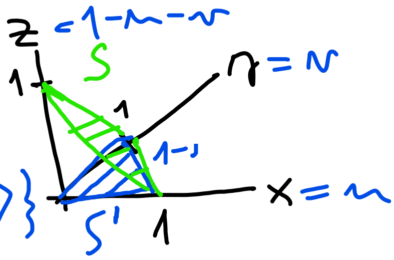
MA2 - Osmé cvičení

Karel Pospíšil

1 Plošný integrál funkce.

1.1 Najděte plošný integrál $\iint\limits_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$, kde $S = \{(x,y,z)|x+y+z=1, 0 < x, 0 < y, 0 < z\}$.

$[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\ln 2]$



PARAMETRIZACE S :

$S = \{(u, v, 1-u-v), v \in (0, 1-u), u \in (0,1)\}$

VZOREC

PLOŠNÝ DVOJNÝ

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{S'} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left\| \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right) \right\| du\,dv$$

KDE $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in S'$ JE PARAMETRIZACE S

TAKŽE PŘEVEDU PLOŠNÝ NA DVOJNÝ

$$\iint\limits_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dS = \iint\limits_{S'} \frac{1}{(1+u+\ \ )^2} \cdot \|(1,0,-1) \times (0,1,-1)\|\,du\,dv =$$

A DVOJNÝ NA JEDNODUCHÝ Z JEDNODUCHÉHO

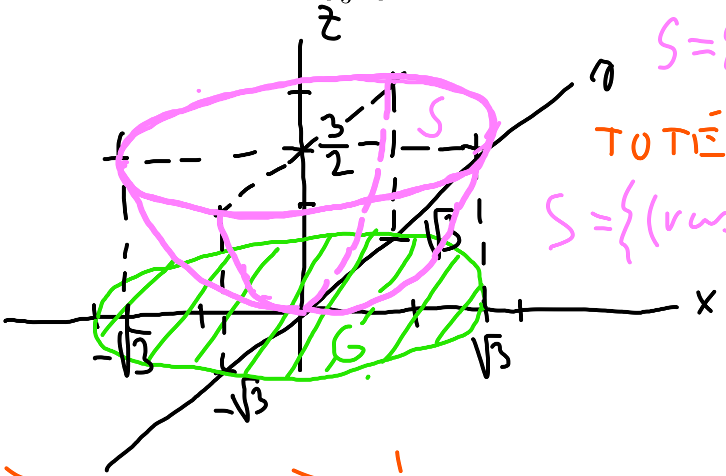
$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{(1+u+v)^2} \left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{vmatrix} \right\| \, dv \, du = \int_0^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{(1+u+v)^2} \sqrt{1+1+1} \, dv \, du =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \left[\frac{-1}{1+u+v} \right]_0^{1-u} du = -\sqrt{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+u} \right) du = -\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \left[\ln|1+u| \right]_0^1 \right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \ln(2)$$

1.2 Najděte plošný integrál $\iint\limits_S \mathrm{d}S$, kde $S = \{(x,y,z) | x^2+y^2 = 2z, x^2+y^2 \le 3\}$.

$[\frac{14}{3}\pi]$



PARAMETRIZACE S:

$S = \{(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}) \mid (u,v) \in G\}$

TOTÉŽ V CYLINDRICKÝCH SOUŘ.:

$S = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \frac{r^2}{2}) \mid (r,\varphi) \in \langle 0, \sqrt{3}) \times \langle 0, 2\pi)\}$

PŘEVEDU PLOŠNÝ NA DVOJNÝ

$$\iint_S 1\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} 1 \cdot \left\| \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & r \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \end{vmatrix} \right\| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{r^4\cos^2\varphi + r^4\sin^2\varphi + r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{r^2+1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{r^2+1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left[(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (4^{\frac{3}{2}} - 1)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{7}{3}2\pi = \underline{\underline{\frac{14}{3}\pi}}$$

1.3 Najděte plošný integrál $\iint\limits_S x^2 + y^2 \mathrm{d}S$, kde $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$[\frac{\sqrt{2}}{2}\pi]$

2 Plošný integrál vektorového pole, Gaussova věta.

2.1 Najděte plošný integrál $\iint\limits_{(S)} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $S = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0, \vec{n} \text{ jde ven}\}$.

$[2\pi R^3]$

JINÉ ZNAČENÍ $\iint\limits_{(S)} (x,y,z)\, \bar{S}$

VZOREC SYMBOLIČTĚJŠÍ, KVŮLI ÚSPOŘE MÍSTA

$$\iint\limits_{(S)} \underbrace{(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))}_{\bar{F}}\, d\bar{S} =$$

$$= \iint\limits_{S'} \bar{F}(\phi(u,v)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v}\right)}_{\bar{n}} du\,dv$$

$\bar{n}$ ... NORMÁLOVÝ VEKTOR, OVĚŘUJE SE ORIENTACE

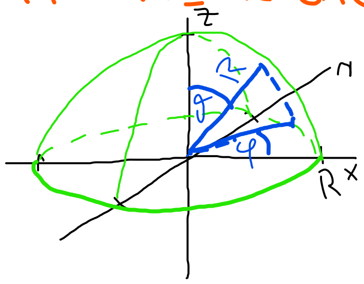
KDE $\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $(u,v) \in S'$

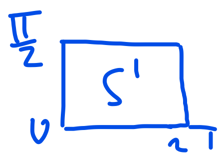
JE PARAMETRIZACE S

SFÉRICKÉ SOUŘADNICE

$x = R\cos\varphi\sin\vartheta$
$y = R\sin\varphi\sin\vartheta$
$z = R\cos\vartheta$

PARAMETRIZACE S





$S = \{(R\cos\varphi\sin\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\vartheta) : \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle\}$

PŘEVEDU PLOŠNÝ NA DVOJNÝ

$$\iint\limits_{(S)} (x,y,z)\, d\bar{S} = R^3 \iint\limits_{S'} (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta) \cdot \left(\begin{vmatrix} -\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{vmatrix} \right) d\varphi\, d\vartheta =$$

A NA DVA JEDNODUCHÉ

$\bar{n}$ PRO $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$ $(-1,0,0) \to \bar{n}$ JDE DOVNITŘ, ORIENTACE OPAČNÁ

$$= R^3 \iint (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta) \cdot \underbrace{(-\cos\varphi\sin^2\vartheta, -\sin\varphi\sin^2\vartheta, -\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta)}_{\text{SOUŘADNICE } \bar{n} \text{ VZHLEDEM K } (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} d\ d =$$

$$= R^3 \iint \cos^2\varphi \sin^3\vartheta + \sin^2\varphi \sin^3\vartheta + \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d \, d = R^3 \iint \sin^3\vartheta + \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d \, d =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = R^3 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = R^3 \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = \underline{\underline{2\pi R^3}}$$

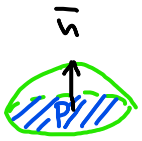
JINÝ POSTUP – GAUSSOVA VĚTA, VZOREC:

$$\iint_{(S)} \bar{F}(x,y,z)\, d\bar{S} = \iiint_G \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$ KDE G JE TĚLESO, OBKLÍČENÉ UZAVŘENOU PLOCHOU

$$\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\iint_{(S)} \bar{F}(x,y,z)\, d\bar{S} = 3 \overbrace{\iiint_{\underbrace{G}_{\text{POLOKOULE}}} 1 \, dx\, dy\, dz}^{\text{OBJEM POLOKOULE}} = \underbrace{3 \, \frac{1}{2} \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{\text{OBJEM KOULE}}}_{\text{OBJEM POLOKOULE}} = \underline{2\pi R^3}$$

ZDE OVŠEM S NENÍ UZAVŘENÁ PLOCHA KOLEM G, SPOČÍTALI JSME TEDY VLASTNĚ SOUČET HLEDANÉHO INTEGRÁLU (PLOCHA S) A INTEGRÁLU PRO KRUH, TVOŘÍCÍ "PODSTAVU" POLOKOULE, TEN SPOČÍTÁM



$$\iint_{(P)} \bar{F}(x,y,z)\, d\bar{S} = \iint_P (\; , v, 0) \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \right) du\, dv = \iint_P (u,v,0) \cdot \overbrace{(0,0,1)}^{n!} du\, dv = \iint_P 0 \, du\, dv = 0$$

A VYJDE NULA, TEDY VÝSLEDEK: $2\pi R^3 - 0 = \underline{\underline{2\pi R^3}}$

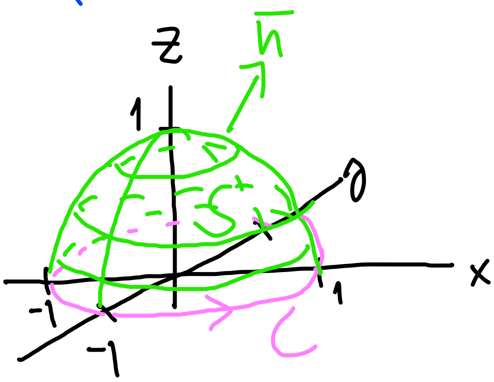
3 Plošný integrál vektorového pole. Stokesova věta.

3.1 Najděte plošný integrál $\iint\limits_{(S)} rot\vec{F}\mathrm{d}S$, kde $\vec{F} = (xyz, x, e^{xy}cosz),\ S = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, \vec{n}$ jde nahoru$\}$.

STOKESOVA VĚTA - VZOREC

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{rot}\,\bar{F}\, d\bar{S} = \int\limits_{(C)} \bar{F}\, d\bar{s}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{rot}(xyz, x, e^{xy}\cos z)\, d\bar{S} = \int\limits_{(C)} (xyz, x, e^{xy}\cos z)\, d\bar{s} =$$



ORIENTACE OK

$C = \{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \mid \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$

$$\int_0^{2\pi} (\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot 0, \cos\varphi, e^{\cos\varphi\sin\varphi}\cdot 1)\cdot(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi}}$$