MA2 - Desáté cvičení

Karel Pospíšil

1 Taylorovy řady

1.1 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = (x+3)cos\pi x + 2x, a = -3$.

$$[f(x) = -6 + (x+3) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\pi^{2k}}{(2k)!}(x+3)^{2k+1} \text{ pro } x \in \mathbb{R}]$$

UPRAVÍM S OHLEDEM NA ZADANÝ STŘED

$$(x+3)\cos(\pi x) + 2x = -(x+3)\cos(\pi(x+3)) + 2(x+3) - 6 =$$

POUŽIJU VZOREC: $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, PRO $x \in \mathbb{R}$.

$$= (x+3)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k}(x+3)^{2k}}{(2k)!} + 2(x+3) - 6 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}(x+3)^{2k+1} + 2(x+3) - 6 =$$

$$= (-1)^{0+1}\frac{\pi^{2\cdot 0}}{(2\cdot 0)!}(x+3)^{2\cdot 0+1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}(x+3)^{2k+1} + 2(x+3) - 6 =$$

$$= -6(x+3)^0 + (x+3)^1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}(x+3)^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

VÝSLEDEK JE VE TVARU $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+3)^k$, KDE $a_0 = -6, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{\pi^2}{2}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{\pi^4}{4!}, \ldots$, TEDY JE TO ŘADA SE STŘEDEM -3.

1.2 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = \frac{x+4}{x+1}, a = 5$.

$$\left[f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}3^k}(x-5)^k \text{ pro } x \in (-1, 11)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

PŘIZPŮSOBENÍ VZORCI A STŘEDU

$$\frac{x+4}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{3}{6+(x-5)} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{x-5}{6}\right)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{x-5}{6}\right)^k =$$

SJEDNOCENÍ 0-TÉHO ČLENU

PODMÍNKY

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot 6^k}(x-5)^k}}, \quad \left|\frac{x-5}{6}\right| < 1 \rightarrow |x-5| < 6 \rightarrow \underline{\underline{x \in (-1, 11)}}$$

1.3 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2x-3}$, $a = -4$.

$$[f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{-1}{5^{k+1}} - 2)(x+4)^k \text{ pro } x \in (-5, -3)]$$

$$\frac{3x+1}{x^2+2x-3} = \frac{3x+1}{(x+3)(x-1)} = \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{-1+(x+4)} + \frac{1}{-5+(x+4)} = \frac{-2}{1-(x+4)} - \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{x+4}{5}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} -2(x+4)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{x+4}{5}\right)^k = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{5^{k+1}}\right)(x+4)^k}},$$

$$\underbrace{\begin{array}{l} |x+4| < 1 \to x \in (-5,-3) \\ |x+4| < 5 \to x \in (-9,1) \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{x \in (-5,-3)}}$$

1.4 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = (-x+2)e^{3x}, a = -2$.

$$[f(x) = 4e^{-6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-6}(-k+12)3^{k-1}}{k!}(x+2)^k \text{ pro } x \in \mathbb{R}]$$

ÚPRAVA KVŮLI STŘEDU

VZOREC → $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, x \in \mathbb{R}$

$$(-x+2)e^{3x} = (-x+2)e^{3(x+2)}e^{-6} = (-(x+2)+4)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3(x+2))^k}{k!}e^{-6} =$$

ROZNÁSOBENÍ ZÁVORKY

ÚPRAVA ŘAD

$$= \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{3^k}{e^6 k!}(x+2)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\cdot 3^k}{e^6 k!}(x+2)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-3^{k-1}}{e^6 (k-1)!}(x+2)^k + \frac{4}{e^6} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^k}{e^6 k!}(x+2)^k =$$

$$= \frac{4}{e^6} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}(12-k)}{e^6\, k!}(x+2)^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

1.5 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$, $a = -4$.

$$\left[f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}}(x+4)^k \text{ pro } x \in (-7;-1)\right]$$

UPRAVÍM NA SOUČET GEOMETRICKÉ ŘADY PRO STŘED −4

POUŽIJU VZOREC $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},\ |x|<1$

$$\frac{3}{(x+1)^2} = \left(\frac{-3}{x+1}\right)' = \left(\frac{-3}{-3+(x+4)}\right)' = \left(\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}\right)' =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{x+4}{3}\right)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{x+4}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}(x+4)^{k-1} =$$

POSUNU k O JEDNA NÍŽ

$$= \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{3^{k+1}}(x+4)^k}}$$

PODMÍNKY

$$\left|\frac{x+4}{3}\right| < 1 \rightarrow |x+4| < 3 \rightarrow \underline{\underline{x \in (-7,-1)}}$$

VZOROVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA PŘ. 5

ZJISTĚTE KONVERGENCI NA $\mathbb{R}$ A NAJDĚTE SOUČET

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{k}\right)x^k$$

PODÍLOVÉ LIMITNÍ KRIT.

$$|x| \lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{k+1}\,\frac{k}{k+2} = |x|\cdot 1 < 1 \rightarrow \underline{\underline{\text{AK I K NA } (-1,1)}}$$

PRO $x=1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{k}\right) \quad \underline{D}$$

PRO $x=-1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{k}\right)(-1)^k \quad \underline{D}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$$

SOUČET

$$\sum\left(1+\frac{2}{k}\right)x^k = \sum x^k + 2\sum\frac{x^k}{k} =$$

$$\sum a x^k = \frac{a}{1-x}$$

$$\ln(1+x) = \sum (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

$$= \frac{1}{1-x} + 2\sum\frac{(-1)^k(-x)^k}{k} =$$

$$= \frac{1}{1-x} - 2\sum(-1)^{k+1}\frac{(-x)^k}{k} = \underline{\underline{\frac{1}{1-x} - 2\ln(1-x)}}$$