

Cvičné příklady pro 1. test z MA2A psaný během semestru.

Všechny kroky je potřeba zdůvodnit.

První úlohy.

1. Určete tečnou rovinu k ploše funkce $ye^{2x}\sin(z) + y = 2$ v bodě $T = (0, 2, 0)$.
[$\tau : y + 2z = 2$]
2. Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y) = ytg(x + 1)\cos(x)$ v bodě $A = (-1, 1)$.
[$\tau : x\cos(1) - z = \cos(1)$]
3. Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y) = yx$ v počátku a v bodě $A = (2, 1, 2)$.
[$\tau : z = 0, \tau : x + 2y - z = 2$]
4. Určete tečnou rovinu k ploše $y\ln(ex + 1)\cos(z) + y = 2$ v bodě $T = (0, 2, 0)$.
[$\tau : 2ex + y = 2$]
5. Spočtete derivaci $f(x, y) = xyz$ ve směru vektoru od bodu $A = (5, 1, 2)$ do bodu $B = (9, 4, 14)$
[Vektor po úpravě na jednotkový $\frac{1}{13}(4, 3, 12)$, derivace (v bodě A) $\frac{98}{13}$]
6. Určete směr největšího růstu funkce $f(x, y) = y^2\ln^2(x) + \operatorname{arctg}(x - y)$ v bodě $A = (1, 0)$. Pro tentýž bod spočtete derivaci ve směru $u = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$
[$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$]
7. Určete směr největšího růstu funkce $f(x, y) = x\sin(x^2 + y - 1)$ v bodě $A = (1, 1)$.
Pro tentýž bod spočtete derivaci ve směru $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
[$(\sin(1) + 2\cos(1), \cos(1)), (\sin(1) + 2\cos(1))\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(1)\frac{\sqrt{2}}{2}$]

Druhé úlohy.

1. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$f(x, y) = x + 2y + 1$ na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 = 1\}$. Množinu načrtněte.

[Největší $f(1 + \frac{\sqrt{10}}{5}, 2\frac{\sqrt{10}}{5}) = 2 + 3\frac{\sqrt{10}}{5}$, nejmenší $f(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}, -2\frac{\sqrt{10}}{5}) = 2 - 3\frac{\sqrt{10}}{5}$.]

2. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$f(x, y) = xy - y - x + 1$ na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, 1 \leq y\}$. Množinu načrtněte.

[Největší $f(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$, nejmenší $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$.]

3. Určete lokální extrémy funkce

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

[Lokální maximum v $(0, 0)$, lokální minima v $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.]

4. Určete lokální extrémy funkce

$f(x, y) = x^2y(4 - x + y)$.

[V $(0, y)$, $(4, 0)$ není extrém. lokální minimum v $(2, -1)$.]

5. Určete lokální extrémy funkce

$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

[Není extrém v $(0, 0)$, lokální minimum v $(1, \frac{1}{2})$.]

6. Určete lokální extrémy funkce

$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 6xy$.

[Není extrém v $(0, 0)$ a v $(2, 0)$, lokální minimum v $(1, 1)$, lokální maximum v $(1, = 1)$.]