Cvičné příklady pro test z MA2 psaný během semestru.

Všechny kroky je potřeba zdůvodnit.

Úlohy na dvojný integrál. Doporučuji spočitat v obou pořadích integrace. Kde to jde využívejte substituci pomocí polárních souřadnic. Taky si připomeňte, jak se pomocí dvojného integrálu řeší věci jako velikost a hmotnost plochy, objem tělesa či poloha těžiště plochy.

1. Vypočtěte integrál
$\iint\limits_A \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad , \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq y[\}.$
[0]

2. Vypočtěte integrál
$\iint\limits_A x - 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad , \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 1 \leq y \leq 0, 0 \leq x\}.$
[$\frac{47}{60}$]

3. Vypočtěte integrál
$\iint\limits_A \frac{4xy^2}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad , \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, 0 \leq x\}.$
[$\frac{8}{9}$]

4. Vypočtěte integrál
$\iint\limits_A yx^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad , \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{x}\}.$
[$\frac{1}{160}$]

5. Změnte pořadí integrace a výsledek převeďte do polárních souřadnic.
$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy^3 - y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.
[$\int\limits_{0}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy^3 - y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{2} (rcos(\phi)r^3 sin^3(\phi) - rsin(\phi))r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$]

6. Určete hmotnost a těžiště půlelipsove plochy $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, 0 \leq y\}$.

$[m = \int_0^\pi \int_0^1 2r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \pi, T = (0, \frac{\int_0^\pi \int_0^1 4r^2 sin(\phi) \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{\int_0^\pi \int_0^1 2r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}) = (0, \frac{8}{3\pi})]$

Úlohy na křivkový integrál. Zde si připomeňte, jak se pomocí křivkového integrálu řeší věci jako délka a hmotnost křivky. Kde to jde, zkuste použít Greenovu větu.

1. Určete
$\int_{(C)} (-2y, 2x+2) \,\mathrm{d}\vec{s}$, C je kladně orientovaná hranice $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
$[2\pi]$

2. Určete
$\int_C x^2 - y^2 \,\mathrm{d}s$, C je kladně orientovaná hranice $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$
$[\frac{16}{3}]$

3. Určete
$\int_{(C)} (y, y^2 + x^2) \,\mathrm{d}\vec{s}$, C je kladně orientovaná hranice $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$
$[-\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}]$

4. Určete
$\int_C \frac{x^2 - y^2}{4} \,\mathrm{d}s$, C je kladně orientovaná hranice $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}$
$[-\frac{16}{3}]$

5. Vypočtěte integrál
$\int_{(C)} (y, -x+1) \,\mathrm{d}\vec{s}$, C je kladně orientovaná elipsa $C = \{(x,y)\,, y^2 + (\frac{x}{2})^2 = 1, x \geq 0\}$.
$[2 - 2\pi]$

6. Určete délku křivky $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = ln(x), 0 < a \leq x \leq b\}$.
$[l = \int_C 1 \,\mathrm{d}s = \int_a^b ||(1, \frac{1}{t})|| \,\mathrm{d}y = b - a - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}]$

7. Určete hmotnost křivky $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = 2x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, je-li hmota rozložena s hustotou $f(x,y) = |y|$.
[$m = \int\limits_C |y| \, \mathrm{d}s = \int\limits_{-1}^{1} |y| \sqrt{y^2+1} \, \mathrm{d}y = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$]