Řady-místy řešené úlohy M2 M3

Karel Pospíšil

1 Číselné řady

1.1 Sečtěte řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{3^k})$.

$[-\frac{1}{6}]$

1.2 Sečtěte řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-3}}{2^k}$.

$[\infty]$

1.3 Sečtěte řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2}}{2^k}$.

$[-\frac{1}{5}]$

1.4 Sečtěte řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

$[\frac{3}{4}]$

1.5 Sečtěte řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2-3k-2}$.

$[\frac{1}{3}]$

1.6 Sečtěte řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5}{(k+3)(k-2)}$.

$[\frac{29}{20}]$

1.7 Sečtěte řadu $\sum\limits_{k=3}^{\infty}(\sqrt{k-1} - \sqrt{k-2})$.

$[\infty]$

1.8 Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k4^k}$.

[srovnávací kritérium, konverguje]

1.9 Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

[podílové kritérium, diverguje]

1.10 Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{1}{k}$.

[odmocninné kritérium, konverguje]

1.11 Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1+k}{1+k^2})^2$.

[integrální kritérium, konverguje]

1.12 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k+3}$.

[konverguje relativně]

1.13 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(3k-1)^2}$.

[konverguje absolutně]

2 Mocninné řady

2.1 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{3k-1}$.

Řešení:
Pro řadu absolutních hodnot použijeme limitní podílové kritérium

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2x+1)^{k+1}}{3(k+1)-1}\frac{3k-1}{(2x+1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|2(x+\frac{1}{2})\frac{(3k-1)}{3(k+1)-1}\right| =$$

$$=\left|x+\frac{1}{2}\right|\lim_{k\to\infty}\frac{2(3k-1)}{3(k+1)-1} = \left|x+\tfrac{1}{2}\right|2<1$$

Platí $\left|x+\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$ na otevřeném intervalu $(-1,\,0)$,
řada absolutních hodnot tedy konverguje na otevřeném intervalu $(-1,\,0)$.
Původní řada tedy na stejném intervalu konverguje absolutně i neabsolutně.
Střed konvergence řady je $-\frac{1}{2}$, poloměr je $\frac{1}{2}$.
Je-li $x = 0$ jde o řadu s nezápornými členy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}$$

která diverguje (viz např. integrální nebo srovnávací (s využitím divergence harmonické řady) kritérium).
Je-li x=-1 jde o řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k-1}$$

řada absolutních hodnot

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{3k-1}\right| =\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}$$

diverguje (viz x=0), tedy řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k-1}$$

nekonverguje absolutně.
Pro konvergenci lze použít Leibnizovo kritérium, posloupnost $\dfrac{1}{3k-1}$ je nezáporná, nerostoucí a limituje k 0, takže řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k-1}$$

konverguje.
Takže řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{(2x+1)^k}{3k-1}$$

konverguje absolutně na $(-1,\,0)$ a neabsolutně na $\langle -1,\,0)$, jinde diverguje.

2.2 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 4k^2(\frac{x}{3}+1)^k$.

[na $(-6,0)$ konverguje absolutně]

2.3 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{(k+5)^2}$.

[na $\langle 2,4\rangle$ konverguje absolutně]

2.4 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{\sqrt{(k+5)^k}}$.

[na $\mathbb{R}$ konverguje absolutně]

2.5 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k^2+1)^k}{\sqrt{(k+5)^k}}(x-3)^k$.

[konverguje absolutně pro $x=3$]

3 Taylorovy řady

3.1 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = (x+3)cos\pi x+2x, a = -3$.

$$[f(x) = -6 + (x + 3) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\pi^{2k}}{(2k)!}(x + 3)^{2k+1} \text{ pro } x \in \mathbb{R}]$$

3.2 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = \frac{x+4}{x+1}, a = 5$.

Řešení:
Funkci upravíme

$$\frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1} = 1 + \frac{3}{6+x-5} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{x-5}{6})}$$

a použijeme vzorec pro součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$, kde $|q| < 1$.

Takže

$$1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{x-5}{6})} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-\frac{x-5}{6})^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^k (x-5)^k.$$

Ze sumy vyndáme nultý člen

$$\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^k (x-5)^k$$

a vidíme, že jsme skutečně vytvořili mocninnou řadu se středem 5, která konverguje k dané funkci pro všechna řešeni nerovnice $\left|-\frac{x-5}{6}\right| < 1$, tedy na intervalu $(-1, 11)$.

3.3 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2x-3}, a = -4$.

$$[f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{-1}{5^{k+1}} - 2)(x + 4)^k \text{ pro } x \in (-5, -3)]$$

3.4 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = (-x + 2)e^{3x}, a = -2$.

Řešení:
Funkci upravíme

$$(-x + 2)e^{3x} = (-(x + 2) + 4)e^{3(x+2)-6}$$

a použijeme vzorec pro řadu exponenciální funkce $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Takže

$$-((x + 2) - 4)e^{3(x+2)-6} = -((x + 2) - 4)e^{-6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3(x + 2))^k}{k!} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} e^{-6}\frac{3^k}{k!}(x+2)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} 4e^{-6}\frac{3^k}{k!}(x+2)^k = -\sum_{m=1}^{\infty} e^{-6}\frac{3^{m-1}}{(m-1)!}(x+2)^m + \sum_{k=0}^{\infty} 4e^{-6}\frac{3^k}{k!}(x+2)^k.$$

(v první sumě zavedena substituce $m = k + 1$)

Ze druhé sumy vyndáme nultý člen

$$-\sum_{m=1}^{\infty} e^{-6}\frac{3^{m-1}}{(m-1)!}(x+2)^m + 4e^{-6} + \sum_{k=1}^{\infty} 4e^{-6}\frac{3^k}{k!}(x+2)^k = 4e^{-6} + \sum_{k=1}^{\infty}(-e^{-6}\frac{3^{m-1}}{(m-1)!} + 4e^{-6}\frac{3^m}{m!})(x+2)^m$$

(v druhé sumě zavedena substituce $m = k$)
a vidíme, že jsme skutečně vytvořili mocninnou řadu se středem -2, která konverguje k dané funkci pro $3(x+2) \in \mathbb{R}$, tedy $x \in \mathbb{R}$.

3.5 V Taylorovu řadu se středem a rozviňte funkci $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, a = -4.$

$[f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}}(x+4)^k$ pro $x \in (-7, 1)]$

4 Fourierovy řady

4.1 Najděte Fourierovu řadu, Fourierovu sinovou řadu a Fourierovu kosinovou řadu funkce $f(t)$. Určete jejich součty.

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{pro } t \in \langle 0, 2\pi) \\ -2 & \text{pro } t \in \langle 2\pi, 4\pi) \end{cases}$$

$$[\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{10}{(2k-1)\pi} \sin \tfrac{2k-1}{2} t = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in (0, 2\pi) \cup (2\pi, 4\pi) \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t \in \{0, 2\pi\} \end{cases}]$$

$$[\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{2}{k\pi}(-5\cos k\tfrac{\pi}{2} + 3 + 2\cos k\pi) \sin \tfrac{1}{4}kt = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in (0, 2\pi) \cup (2\pi, 4\pi) \\ 0 & \text{pro } t \in \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t \in \{2\pi\} \end{cases}]$$

$$[\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{10}{k\pi} \sin \tfrac{1}{2}k\pi \cos \tfrac{1}{4}kt = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{10}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1} \cos \tfrac{2k-1}{4} t = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in \langle 0, 2\pi) \cup (2\pi, 4\pi) \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t \in \{2\pi\} \end{cases}]$$

4.2 Najděte Fourierovu řadu, Fourierovu sinovou řadu a Fourierovu kosinovou řadu funkce $f(t)$. Určete jejich součty.

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 2) \\ t - 4 & \text{pro } t \in \langle 2, 4) \end{cases}$$

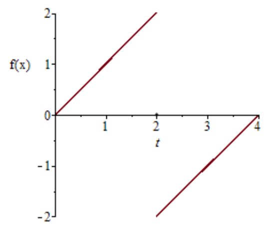
4.2.1 Fourierova řada a fourierova sinová řada

$$[\sum_{k=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^{1+k} \sin\left(\frac{1}{2}\, k\pi\, t\right)}{k\pi} = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in \langle 0, 2) \cup (2, 4) \\ 0 & \text{pro } t \in \{2\} \end{cases}]$$

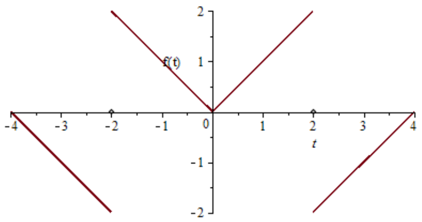
$$[\sum_{k=1}^{\infty} -8 \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\, k\pi\right) \sin\left(\frac{1}{4}\, k\pi\, t\right)}{k\pi} = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in \langle 0, 2) \cup (2, 4) \\ 0 & \text{pro } t \in \{2\} \end{cases}]$$

4.2.2 Kosinová Fourierova řada

Řesení: Funkce vypadá takto



Doplníme ji na sudou,



udělá me z ní funkci periodickou kde $T = 8$, $\omega = 2\,\frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$ a spočítáme koeficienty

$$a_0 = 2\,\frac{\int_{-4}^{4} f(t)\ \mathrm{d}t}{T} = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_2^4 t - 4\,\mathrm{d}t = 0$$

$$a_k = 2\,\frac{\int_{-4}^{4} f(t)\cos(k\omega\, t)\ \mathrm{d}t}{T} = 2\cdot 2\frac{\int_0^4 f(t)\cos(k\omega\, t)\ \mathrm{d}t}{T} = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\cos\left(k\frac{\pi}{4}t\right)\ \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^2 t\ \cos\left(k\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}\left(\int_2^4 (t-4)\ \cos\left(k\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t\right) = \text{(per partes)} =$$
$$= \frac{2}{k\pi}\left([t\ \sin\left(k\frac{\pi}{4}t\right)]_0^2 - \int_0^2\ \sin\left(k\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t\right) + \frac{2}{k\pi}\left([(t-4)\ \sin\left(k\frac{\pi}{4}t\right)]_2^4 - \int_2^4\ \sin\left(k\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t\right) =$$
$$= \frac{2}{k\pi}(2\ \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{k\pi}[\cos\left(k\frac{\pi}{4}t\right)]_0^2) + \frac{2}{k\pi}(2\ \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{k\pi}[\cos\left(k\frac{\pi}{4}t\right)]_2^4) =$$
$$= \frac{2}{k\pi}(2\ \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{k\pi}(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1)) + \frac{2}{k\pi}(2\ \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{k\pi}(\cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right))) =$$
$$= \frac{2}{k\pi}(+4\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi} + \frac{4}{k\pi}(\cos(k\pi)))$$

$b_k = 0$ (funkce je sudá, řada je kosinová)

Takže kosinová Fourierova řada
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(+4\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi} + \frac{4}{k\pi}(-1)^k)\cos\left(k\frac{\pi}{4}\,t\right)$$
Přitom podle Jordanova kriteria platí
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(+4\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi} + \frac{4}{k\pi}(-1)^k)\cos\left(k\frac{\pi}{4}\,t\right) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in \langle 0,2) \cup (2,4) \\ 0 & \text{pro } t \in \{2\} \end{cases}$$

4.3 Najděte Fourierovu řadu, Fourierovu sinovou řadu a Fourierovu kosinovou řadu funkce $f(t)$. Určete jejich součty.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{pro } t \in \langle 0, 2) \\ (t-4)^2 & \text{pro } t \in \langle 2, 4) \end{cases}$$

$[4/3 + \sum_{k=1}^{\infty} 16 \frac{(-1)^k \cos\left(\frac{1}{2}k\pi t\right)}{k^2\pi^2} = f(t) \text{ pro } t \in \langle 0, 4)]$

$[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(64 \sin\left(\frac{1}{2}k\pi\right)k\pi + 64(-1)^k - 64\right)\sin\left(\frac{1}{4}k\pi t\right)}{k^3\pi^3} = f(t) \text{ pro } t \in \langle 0, 4)]$

$[4/3 + \sum_{k=1}^{\infty} 64 \frac{\cos\left(\frac{1}{2}k\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}k\pi t\right)}{k^2\pi^2} = f(t) \text{ pro } t \in \langle 0, 4)]$