

ŘEŠENÍ ÚLOH, CVIČENÍ 8-9

1. (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$

2. (a) $\begin{pmatrix} 3 & -8 & -13 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

(b) Nemá řešení.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

3. (a) Jde například o soustavu $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

(b) Jde například o soustavu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

(c) Jde například o soustavu $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -7 & -15 \end{array}\right)$.

(d) Jde například o soustavu $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 & 3 & 25 \end{array}\right)$.

4. (a) Výrok platí. Matice soustavy A může mít hodnot nejvýše 2, tedy její defekt je alespoň $3 - 2 = 1$, a tedy, A má netriviální jádro. Pokud tedy soustava má alespoň jedno řešení, potom, dle Frobeniovy věty množina všech řešení je nekonečná, neboť obsahuje $\ker(A)$.
- (b) Výrok platí. Dle Frobeniovy věty platí $M = \vec{x}_p + \ker(A)$, pro nějaké partikulární řešení $\vec{x}_p \in \mathbb{R}^n$. Tedy pro vektor $\vec{x} = \vec{x}_p$ platí, že množina $\{\vec{y} - \vec{x} : \vec{y} \in M\}$ je rovna $\ker(A)$, což je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$.
- (c) Výrok platí. Každá nulová matice X o dvou řádcích a libovolném počtu sloupců totiž tuto maticovou rovnici řeší.